



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الرابعة / نظري / د. نورة العسلي

{{ مكتبة A to Z }}



مكتبة A to Z Facebook Group :

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الاستيفاء

غالباً ما نحصل في الفيزياء و العلوم الأخرى على توابع تجريبية $f(x)$ نتيجة تجربة ما يمكن كتابتها على شكل جدول كما يلي:

x	x_0	x_1		x_i		x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_i)$		$f(x_n)$

و قد تكون هذه القيم غير كافية للتعبير بكل جيد عن التجربة التي نجريها، بمعنى آخر نريد الحصول على قيم إضافية من أجل الحصول على نتيجة جيدة للتجربة التي نجريها.
و من أجل ذلك و اعتماداً على الجدول المعطى نقرب التابع $f(x)$ بحدودية $P_n(x)$
إن تعيين الحدودية $P_n(x)$ يعتمد على تطابق قيم التابع التجريبي $f(x)$ و الحدودية $P_n(x)$ عند النقط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ أي: $f(x_i) = P_n(x_i), i = 0,1,2, \dots, n$
إن مسألة تعيين الحدودية $P_n(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم التابع $f(x)$ عند نقط واقعة بين النقط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ تسمى بالاستيفاء الداخلي (الاستكمال) و تسمى الحدودية $P_n(x)$ بحدودية الاستيفاء كما تسمى النقط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ بنقاط الارتكاز.

سندرس ثلاث طرق في الاستيفاء و هي:

1. طريقة نيوتن غريغوري الأمامية

2. طريقة لاغرانج

3. طريقة المربعات الصغرى

أولاً: طريقة نيوتن غريغوري الأمامية:

من أجل إيجاد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعروف بالجدول:

x	x_0	x_1		x_i		x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1		y_i		y_n

نفرض أن المسافة بين كل نقطتين متتاليتين ثابتة و تساوي h أي:

$$x_1 - x_0 = h, x_2 - x_1 = h, \dots, x_n - x_{n-1} = h$$

لنعرف المؤثر التفاضلي Δ كما يلي: $\Delta y_i = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i = y_{i+1} - y_i$
تسمى هذه الفروق بالفروق الأمامية الأولى للتابع $y = f(x)$ و هذه الفروق قد تكون موجبة أو سالبة.

بالاعتماد على الفروق الأمامية الأولى يمكن إيجاد الفروق الأمامية الثانية و الثالثة و الرابعة ..
الخ للتابع $y = f(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ &= y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\ \Delta^2 y_i &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\ \Delta^3 y_i &= \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i \\ &= (y_{i+3} - y_{i+2}) - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i\end{aligned}$$

$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^4 y_i = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i$$

و بأسلوب مشابه نجد أن:

و بشكل عام نكتب:

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}$$

نكتب الفروق الأمامية بالجدول الآتي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

نسمي هذا الجدول بجدول الفروق الأمامية و جداول الفروق الأمامية تكون منتهية.

مثال: اكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $f(x) = \ln x$ حيث:

$$x_0 = 0.30, x_1 = 0.40, x_2 = 0.50, x_3 = 0.60, x_4 = 0.70, x_5 = 0.80, \\ x_6 = 0.90$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0.30	-1.20397						
		0.28768					
0.40	-0.91629		-0.06454				
		0.22314		0.02373			
0.50	-0.69315		-0.04081		-0.01110		
		0.18233		0.01263		0.00603	
0.60	-0.15082		-0.02818		-0.00507		-0.00365
		0.15415		0.00756		0.00238	
0.70	-0.35667		-0.02062		-0.00269		
		0.13353		0.00487			
0.80	-0.22314		-0.01575				
		0.11778					
0.90	-0.10536						

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0 + \cdots + \binom{\alpha}{n} \Delta^n y_0$$

$$\alpha = \frac{x-x_0}{h}, h = x_i - x_{i-1} \quad \text{حيث}$$

ملاحظة:

إن الحصول على حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ من الدرجة n قد يكون صعباً

لذلك نكتفي بالحصول على كثيرة حدود من الدرجة $k; k < n$

إن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الأمامية يقدر بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنده في

$$E = \binom{\alpha}{k+1} \Delta^{k+1} y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} y_0 \quad \text{أي } P_k(x) \text{ حساب}$$

تمرين: أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعروف بالجدول:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	16	81	256	625	1296

الحل:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0						
		1					
1	1		14				
		15		36			
2	16		50		24		
		65		60		0	
3	81		110		24		0
		175		84		0	
4	256		194		24		
		369		108			
5	625		302				
		671					
6	1296						

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0 + \binom{\alpha}{4} \Delta^4 y_0 + \binom{\alpha}{5} \Delta^5 y_0 + \binom{\alpha}{n} \Delta^n y_0$$

$$\alpha = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-0}{1} = x \text{ حيث}$$

$$P_6(x) = 0 + x(1) + \frac{x(x-1)}{2!}(14) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(36) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}(24) + 0 + 0$$

$$P_6(x) = x + 7(x^2 - x) + 6x(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$$

بالإصلاح نجد: $P_6(x) = x^4$.

تمرين: لتكن لدينا الدالة $y = \cos x$ المقدر قيمها بالراديان وفق الجدول الآتي:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.98007	0.92106	0.82534	0.6967	0.54030

المطلوب:

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة.
 2. أوجد حدودية استيفاء نيوتن_غريغوري من الدرجة الثالثة الموافقة لهذه الدالة.
 3. أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x = 0.7$ ثم احسب الخطأ المرتكب.
- الحل:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.98007				
		-0.05901			
0.4	0.92106		-0.03671		
		-0.09572		0.00379	
0.6	0.82534		-0.03292		0.00137
		-0.12864		0.00516	
0.8	0.6967		-0.02776		
		-0.1564			
1	0.54030				

$$x_0 = 0.2 \quad \& \quad h = x_{i+1} - x_i = 0.2$$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = \frac{x - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 5 \left(x - \frac{1}{5} \right) = 5x - 1$$

$$P_3(\alpha) = \sum_{k=0}^3 \binom{\alpha}{k} \Delta^k y_0$$

$$= y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Delta^3 y_0$$



و منه:

$$P_3(x) = 0.98007 + (5x - 1)(-0.05901) + \frac{(5x - 1)(5x - 2)}{2!}(-0.03671) \\ + \frac{(5x - 1)(5x - 2)(5x - 3)}{3!}(0.00379)$$

$$P_3(x) = 0.9985798 + 0.01498x - 0.55363x^2 + 0.0789625x^3$$

$$P_3(0.7) = 0.7648712$$

$$E = \binom{\alpha}{4} \Delta^4 y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

$$\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$$

$$E = \binom{2.5}{4} \Delta^4 y_0 = \left| \frac{2.5(1.5)(0.5)(-0.5)}{4!} (0.00137) \right| = 0.000053515$$

ملاحظة: لو طلب منا تقدير قيمة تقريبية عند $x = 0.7$ بالاعتماد على جدول الفروق الأمامية

فقط أي من دون إيجاد حدودية الاستيفاء الملائمة فإننا نوجدتها بالشكل الآتي:

$$\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5 \text{ فإن } x = 0.7$$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.98007 + \binom{2.5}{1}(-0.05901) + \binom{2.5}{2}(-0.03671) + \binom{2.5}{3}(0.00379)$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.764898$$

تمارين عملي:

1. أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعروف بالجدول:

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.61	1.09	1.58	2.09

ثم أوجد $f(2.33)$ و احسب الخطأ المرتكب.

2. اكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $f(x) = e^x$ حيث:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

و أوجد كثيرة الحدود $P_2(x)$ و احسب قيمة تقريبية ل $f(0.5)$ ثم احسب الخطأ المرتكب.



مكتبة
A to Z