كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

التحليل العددي

قسـم الفيزياء

السنة الثالثة _المحاضرة الأولى

<u>الفهرس</u>

مقدمة:

يعتبر التحليل العددي من أهم موضوعات الرياضيات التطبيقية لعلاقته المباشرة بالتطور التكنولوجي المتسارع حيث تم الاستفادة من القدرات الهائلة للحواسيب في إيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية يصعب حلها بالطرق التحليلية و الجبرية المعتادة، على سبيل المثال يصعب إيجاد الحلول الدقيقة للمعادلة الجبرية: $x^9 - 5x^4 + x^2 - 2x + 5 = 0$ وفق الطرق التقليدية، لذا نلجأ لإيجاد حلول تقريبية لها، مثال آخر : حل بعض المعادلات التفاضلية مع شروط ابتدائية معينة أو حل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية ....الخ.

في مثل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات و هي طرق محددة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة إلى نتائج أو حلول تعد تقريباً للحلول الدقيقة، و الحل التقريبي للمسائل قد يكون كثيرة حدود، و قد يكون حلاً عددياً: عدد واحد كجذر لمعادلة جبرية أو قيمة لتكامل محدد ، أو عدة أعداد تمثل قيم الدالة y (قد تمثل حلاً لمعادلة تفاضلية)عند بعض قيم x، و في هذه الحالة نحن لا نحصل على الصيغة التحليلية لحل المعادلة التفاضلية و إنما نحصل على بعض قيم الدالة y في المدى الذي نهتم فيه بحل المعادلة التفاضلية.

إن معظم الأعداد التي نتعامل معها هي أعداد تقريبية، لأنها غالباً ما تمثل المقادير الفيزيائية بنتيجة القياس الذي هو بحد ذاته تقريبي، كما أننا نستبدل أعداد تقريبية في كثير من المسائل بالأعداد الدقيقة ما يؤدي لظهور أخطاء ندعوها أخطاء التقريب كما أن هناك أنواع أخرى من الأخطاء المرتكبة و هي:

1. **أخطاء الصيغ:**

و هي أخطاء ناتجة عن الصيغ و العلاقات المستخدمة للتعبير عن الحوادث الفيزيائية أو القوانين الهندسية عندما تحتوي هذه العلاقات على ثوابت تقريبية مثل قانون مساحة الدائرة $S = \pi r^2$ حيث نعتبر 3.14 قيمة تقريبية للثابت π.

2. **أخطاء الاقتطاع:**

و هي الأخطاء التي تنشأ عن استبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية كأن نكتب الدوال على شكل متسلسلات لا نهائية و عند إجراء العمليات الرياضية عليها نكتفي بعدد منتهٍ من حدود تلك المتسلسلات ما يؤدي لظهور أخطاء .

3. **الأخطاء الابتدائية:**

و هي الأخطاء في البيانات الأولية و تنتج عن قياس بعض المقادير في معظم الأحيان تقريبياً حيث أن دقة القياس تتبع لحساسية الأجهزة المستخدمة في القياس كما قد تكون هذه الأخطاء ناتجة عن حواس الشخص الذي يقوم بتلك القياسات.

4. **أخطاء التدوير (التقريب):**

ليكن لدينا العدد

$x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots . a_{n-1} a_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}$ و نريد تقريب هذا العدد مكتفين ب $(n-1)$ رقم على يمين الفاصلة العشرية، عندئذٍ نكتب:

حيث $\bar{x} = 0.a_1a_2a_3 \dots a'_{n-1}$ يحدد a'_{n-1} وفق القاعدة الآتية:

إذا كان $a_n > 5$ فإن $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$ و إذا كان $a_n < 5$ فإن $a'_{n-1} = a_{n-1}$

و في حال $a_n = 5$ عندئذٍ نميز حالتين:

1. إذا كان a_{n-1} عدداً زوجياً فإن: $a'_{n-1} = a_{n-1}$

2. إذا كان a_{n-1} عدداً فردياً فإن: $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$

و في هذه الحالة نكون قد ارتكبنا خطأ لا يتجاوز 5×10^{-n}

مثال: لنأخذ $x = 0.235345$ عندئذٍ نلاحظ:

$$\bar{x} = 0.23534 \quad ,5 \times 10^{-6}$$
$$\bar{\bar{x}} = 0.2353 \quad ,4 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$$
$$\bar{\bar{\bar{x}}} = 0.235 \quad ,3 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

بتدوير العدد السابق إلى عدد يحوي رقم عشري واحد $\bar{x} = 0.2$ فإن الخطأ المرتكب لا يتعدى 5×10^{-2}.

الخطأ المرتكب هو الفرق بين القيمة الدقيقة و القيمة التقريبية $x - \bar{x}$ و هو مقدار جبري أي قد يكون موجب أو سالب.

نعرف الخطأ المطلق بأنه القيمة المطلقة للخطأ المرتكب و نرمز له $\delta_x = |x - \bar{x}|$ و هو مقدار موجب دوماً.

كما نعرف الخطأ النسبي بأنه نسبة الخطأ المطلق إلى القيمة الدقيقة للعدد $e_x = \frac{\delta_x}{x}$.

حساب الأخطاء لتوابع في عدة متغيرات:

لتكن لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ يعطى الخطأ المطلق بالعلاقة:

$$(\delta f)_{max} \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| . \delta_{x_i}$$

كما يحسب الخطأ النسبي من العلاقة: $\left(e_f\right)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x, y, z) = x^2yz^3$ احسب الخطأ المطلق و النسبي في حساب قيمة الدالة في النقطة: $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.13, 0.101)$

الحل:

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-2}$$
$$\delta_y \leq 5 \times 10^{-3}$$
$$\delta_z \leq 5 \times 10^{-4}$$

و لدينا:

$$(\delta f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} . \delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} . \delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} . \delta_z$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = |2xyz^3|_{(0.1,0.13,0.101)} = 0.00002678$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = |x^2z^3|_{(0.1,0.13,0.101)} = 0.00001030$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = |3x^2yz^2|_{(0.1,0.13,0.101)} = 0.00003978$$

$$(\delta f)_{max} \leq (0.00002678)(5\times10^{-2}) + (0.00001030)(5\times10^{-3}) + (0.00003978)(5\times10^{-4}) = 0.00000139$$

$$|f| = (0.1)^2(0.13)(0.101)^3 = 0.00000133$$

و منه يكون الخطأ النسبي $(e_f)_{max} \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f|}$

$$(e_f)_{max} \leq \frac{0.00000139}{0.00000133} = 1.045112782 \ .$$

مثال (2): لتكن لدينا الدالة $f(x,y,z) = y^2 \cdot e^{x^3+2z} + 3^y \cdot \ln(z)$ احسب الخطأ المطلق والنسبي في حساب قيمة الدالة في النقطة $(x_0,y_0,z_0) = (0.1, 0.02, 0.0014)$

الحل:

$$\delta x \leq 5\times10^{-2} \qquad \delta_y \leq 5\times10^{-3} \qquad \delta_z \leq 5\times10^{-5}$$

$$(\delta f)_{max} \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta_y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \delta_z$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = 3x^2y^2 \cdot e^{x^3+2z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = 0.00001204$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = 2y \cdot e^{x^3+2z} + 3^y \cdot \ln(3) \cdot \ln(z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = -7.33951958$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = 2y^2 \cdot e^{x^3+2z} + \frac{3^y}{z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = -0.15474766$$

$$(\delta f)_{max} \leq (0.00001204)(5\times10^{-2}) + (7.33951958)(5\times10^{-3}) + (0.15474766)(5\times10^{-5})$$

$$\leq 0.03670594 \qquad f(x_0,y_0,z_0) = -6.71726265$$

$$e_f \leq \frac{(\delta f)_{max}}{|f|} = 0.00546442$$