كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

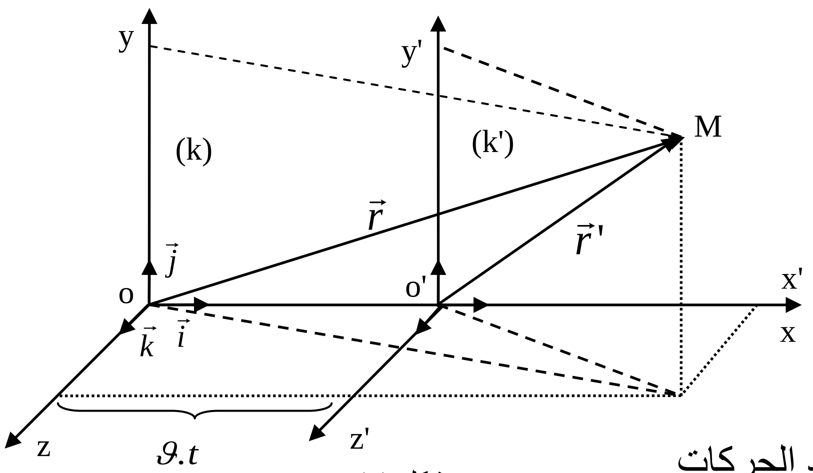
المحاضرة :العاشرة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

الفصل الثامن
النظرية النسبية الخاصة لآينشتين

تحويلات غاليـــليه للمكان والزمن :



شكل (1)

افترض غاليليه وجود جملتين (k) ثابتة محاورها (x,y,z) ومزودة بمتجهات الوحدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ على الترتيب ، و (k') متحركة بسرعة ثابتة $\vec{\vartheta}$ بالنسبة لـ (k) ، محاورها (x',y',z') ومزودة بمتجهات الوحدة $(\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ على الترتيب ، كما هو موضح في الشكل (1) . كما افترض وجود مراقب ساكن في مركز مبدأي كل من الجملتين o و o' . يقوم برصد الحركات الجارية للنقطة M عبر شعاعي الموضع $\vec{r}$ و $\vec{r}\,'$. حيث :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' \qquad (2)$$

افترض غاليليه أن اتجاه حركة الجملة (k') يتم وفق المحور ox للجملة الثابتة (k) ، لذا ولسهولة القياس فقد افترض أن المحور o'x' العائد لـ (k') منطبق على ox . وبالتالي يقطع مركز (k') خلال الزمن t مسافة $x = \vartheta.t$ فتكون العلاقة بين متجهات الموضع للنقطة M في اللحظة t بالشكل

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\vartheta}\,t \qquad (3)$$

بإسقاط (3) على محاور الجملتين (k) و (k') نحصل على علاقات التحويل للموضع

$$\boxed{x' = x - \vartheta t \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t} \qquad (4)$$

هنا اعتبر غاليليه أن الزمن واحد في الجملتين .

<u>تحويلات السرع والتسارع :</u> بما أن السرعة هي المشتق الزمني للموضع ، نجد :

شعاع السرعة في الجملة (k) $\quad \vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

شعاع السرعة في الجملة (k') $\quad \vec{V}\,' = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \dfrac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \dfrac{dz'}{dt}\vec{k}\,'$

العلاقة بين متجهي السرعة في الجملتين

$$\vec{V}\,' = \vec{V} - \vec{\vartheta} \qquad (4)$$

بإسقاط (4) على محاور الجملتين (k) و (k') نحصل على علاقات التحويل للسرعة (السرعة النسبية)

$$V'_{x'} = V_x - \vartheta \qquad V'_{y'} = V_y \qquad V'_{z'} = V_z \qquad (5)$$

للحصول على علاقات تحويل التسارع نشتق السرع زمنياً فنجد

$$a'_{x'} = a_x \qquad a'_{y'} = a_y \qquad a'_{z'} = a_z \qquad (6)$$

أي أن التسارع واحد في جملتي غاليليه . وبالتالي تكون قوانين الحركة واحدة في الجملتين (k) و (k') .

<u>نتيجة :</u> تتفق نتائج مراقبي غاليليه في قياس الزمن $t' = t$ ، والتسارعات على كافة المحاور وفق (6) وقياس الأطوال المعامدة لاتجاه الحركة $y' = y$ و $z' = z$ وكذلك السرع الموافقة لهذه الأطوال $V'_{y'} = V_y$ و $V'_{z'} = V_z$. ولكنها تختلف في قياس الطول الموافق لاتجاه الحركة $x' = x - \vartheta t$ وكذلك السرعة الموافقة لهذا الطول $V'_{x'} = V_x - \vartheta$.

مبادئ نظرية آينشتين في النسبية الخاصة :

اعتمد آينشتين في صياغته للنظرية النسبية على مبدأين أساسيين

١- جمل المقارنة المتحركة بالنسبة لبعضها البعض بسرعات ثابتة هي جمل عطالية (لأن تسارعها معدوم) وبالتالي فالظواهر الفيزيائية متماثلة في كافة جمل المقارنة .

٢- سرعة الضوء c واحدة في كافة جمل المقارنة ، وذلك بغض النظر عن مقدار السرعة الثابتة $\vec{\vartheta}$ لهذه الجمل بالنسبة لبعضها البعض .

طبق آينشتين هذين المبدأين على تحويلات لورانتس للمكان والزمن ، حيث لم يعد الزمن واحداً كما هو الحال في جملتي المقارنة لدى غاليليه (الثابتة والمتحركة) ، أي أن $t \neq t'$.

عموماً تشبه تحويلات لورانتس المكانية تحويلات غاليليه ، في حين ترتبط التحويلات الزمنية بعلاقة غريبة يدخل فيها الطول الموافق لاتجاه الحركة x . وهي على الشكل التالي :

$$\boxed{x' = k(x - \vartheta t) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = a(t - bx)} \qquad (7)$$

حيث (k , a , b) ثوابت ، ويُلاحظ أن k و a عديمي البعد ، في حين يجب أن يكون لـ b بُعداً يساوي مقلوب سرعة . ويمكن العودة من تحويلات لورانتس إلى تحويلات غاليليه بوضع $k = a = 1$ و $b = 0$.

تُحافظ تحويلات لورانتس على تسميتها عند تطبيق مبدأي آينشتين عليها .

تحويلات لورانتس النسبية للمكان والزمن :

بالعودة للشكل (1) وملاحظة المبدأ الأول المتمثل في حركة (k') حركة مستقيمة منتظمة $(|\vec{\vartheta}| = cte)$ بالنسبة للثابتة (k) وفق ox ، فإن تحويلات لورانتس (7) محققة .

وتطبيقاً للمبدأ الثاني (سرعة الضوء c واحدة في كافة جمل المقارنة) ، فقد افترض آينشتين منبعاً ضوئياً في M يُصدر أمواجاً ضوئية ، يمكن لمراقبي الجملتين تلقي هذه الأمواج .

المسافة التي يقطعها الضوء ليصل إلى مراقبي (k) و (k') كلٌ حسب زمنه الخاص t و t' على الترتيب هي

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (a)$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct' \;\Rightarrow\; x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (b)$$

نعوض (7) في (b) فنجد :

$$k^2 (x - \vartheta t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 a^2 (t - bx)^2$$

$$k^2 (x^2 - 2\vartheta x t + \vartheta^2 t^2) + y^2 + z^2 = c^2 a^2 (t^2 - 2bxt + b^2 x^2)$$

$$(k^2 - c^2 a^2 b^2) x^2 - 2(\vartheta k^2 - c^2 a^2 b) x t + y^2 + z^2 = c^2 (a^2 - \frac{\vartheta^2 k^2}{c^2}) t^2 \qquad (c)$$

بمطابقة أمثال (c) مع أمثال (a) نحصل على ثلاث معادلات مجاهيلها الثوابت (k , a , b)

$$k^2 - c^2 a^2 b^2 = 1 \qquad (*)$$

$$\vartheta k^2 - c^2 a^2 b = 0 \qquad (*')$$

$$a^2 - \frac{\vartheta^2 k^2}{c^2} = 1 \qquad (*'')$$

بالحل المشترك لهذه المعادلات .

من (*) و (*') نجد : $c^2 a^2 b^2 = k^2 - 1 = b\vartheta k^2 \;\Rightarrow\; k^2 = \dfrac{1}{1 - b\vartheta}$

ومن (*') و (*'') نجد : $\vartheta^2 k^2 = c^2 a^2 b \vartheta = c^2 (a^2 - 1) \;\Rightarrow\; a^2 = \dfrac{1}{1 - b\vartheta}$

بتعويض قيمتي k^2 و a^2 في (*'') نجد $b=\frac{\vartheta}{c^2}$ وبالتالي $k^2=a^2=\frac{1}{1-b\vartheta}$

إذن تكون قيمة ثوابت تحويلات لورانتس معطاة بدلالة سرعة الجملة المتحركة ϑ وسرعة الضوء c بالشكل التالي :

$$k=a=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}>1 \qquad ; \qquad b=\frac{\vartheta}{c^2} \tag{8}$$

نلاحظ أن الثوابت تحقق ماتقدم ذكره من كون a و k عديمة الأبعاد ، في حين يكون بُعد b مقلوب سرعة بتعويض (8) في (7) نحصل على تحويلات لورانتس النسبية المباشرة للمكان والزمن بالشكل التالي :

$$\boxed{x'=\frac{x-\vartheta t}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad ; \quad y'=y \quad ; \quad z'=z \quad ; \quad t'=\frac{t-\frac{\vartheta}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}} \tag{9}$$

تشير جملة العلاقات (9) إلى الإحداثيات المكانية والزمانية للمنبع المتحرك M من وجهة نظر مراقب الجملة المتحركة (k') بدلالة معطيات مراقب الجملة الثابتة (k) .

بما أن المسافة بين جملتي المقارنة مقدار متغير(بالزيادة أو النقصان) بمرور الزمن الخاص بكل جملة ، ويمكن لكلا المراقبين رصد هذا التغير بسهولة ، لكن لايمكن لأيٍّ منهما الجزم بأن جملته هي المتحركة والأخرى هي الثابتة . ويعود ذلك لعدم وجود جملة مقارنة ثالثة تكون ثابتة بالمطلق (جملة مرجعية) .

فإذا اعتبر المراقب الساكن في (k') أن جملته هي الثابتة وأن (k) هي المتحركة فإنه سيقيس المسافات التي تقطعها (k) بدءاً من مركز جملته (باعتبارها واقعة في المبدأ من وجهة نظره) ، وسيكون القياس معاكساً للاتجاه الافتراضي لمحور الحركة ox ، أي بقيم سالبة . أي ستقطع (k) خلال الزمن t' مســــــــــافة $x'=-\vartheta.t'$. وبمقارنة هذه القراءة للمسافة مع القراءة $x=\vartheta.t$ التي قدمها راصد (k) ، نلاحظ أن القياسات العكسية التي سنحصل عليها بعد التعويض في تحويلات لورانتس العكسية هي شبيهة بالمباشرة ولكن باستبدال مسافات وأزمنة (k) بمسافات وأزمنة (k') والسرعة الموجبة بالسالبة .

فنحصل على تحويلات لورانتس النسبية العكسية (غيرالمباشرة) للمكان والزمن التالية :

$$\boxed{x=\frac{x'+\vartheta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad ; \quad y=y' \quad ; \quad z=z' \quad ; \quad t=\frac{t'+\frac{\vartheta}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}} \tag{10}$$

تشير جملة العلاقات (10) إلى الإحداثيات المكانية والزمانية للمنبع المتحرك M من وجهة نظر مراقب الجملة الثابتة (k) بدلالة معطيات مراقب الجملة المتحركة (k') .

عموماً ، يمكن القول عن التحويلات المباشرة بأنها القياسات التي تتم مباشرةً وفق اتجاه محور الحركة ox ، أما التحويلات غير المباشرة (العكسية) فهي القياسات التي تتم باتجاه يعاكس محور الحركة ox .

<u>ملاحظة :</u> من أجل السرعات الصغيرة للجملة المتحركة ($\vartheta << c$) يمكننا استنتاج تحويلات غاليليـــه المباشرة أو العكسية (4) وذلك باعتبار أن $(\frac{\vartheta}{c^2}\approx\frac{\vartheta^2}{c^2})\to 0$ في تحويلات لورانتس النسبية (9) و (10) .

<u>ملاحظة :</u> تختلف نظرية آينشتين في النسبية العامة عن الخاصة في اعتباره الجملة المتحركة جملة متسارعة ، أي $\vartheta\neq cte$ ، وبالتالي لن تعود القوانين الفيزيائية واحدة في الجملتين (حيث لن تعود الجملة المتحركة جملة عطالية) . وتعتبر هذه النظرية من البحوث المعقدة ، وهي غير مدرجة في بحثنا هذا .

تحويلات لورانتس النسبية المباشرة للسرع :

تعطي هذه التحويلات سرعة المنبع M المقاسة من وجهة نظر مراقب الجملة المتحركة (k') بدلالة معطيات مراقب الجملة الثابتة (k) . ونحصل عليها من (9) باعتبار أن ϑ و c ثوابت كما يلي :

$$V'_{x'}=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{\frac{V_x-\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}{\frac{1-\frac{\vartheta}{c^2}V_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}=\frac{V_x-\vartheta}{1-\frac{\vartheta}{c^2}V_x}\quad ;V_x=\frac{dx}{dt}$$

$$V'_{y'}=\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{V_y\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}{1-\frac{\vartheta}{c^2}V_x}\quad ;V_y=\frac{dy}{dt}\qquad (11)$$

$$V'_{z'}=\frac{dz'}{dt'}=\frac{dz'}{dt}\frac{dt}{dt'}=\frac{\frac{dz'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dt'}{dt}}=\frac{V_z\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}{1-\frac{\vartheta}{c^2}V_x}\quad ;V_z=\frac{dz}{dt}$$

تحويلات لورانتس النسبية العكسية (غير المباشرة) للسرع :

تعطي هذه التحويلات سرعة المنبع M المقاسة من وجهة نظر مراقب الجملة الثابتة (k) بدلالة معطيات مراقب الجملة المتحركة (k') . ونحصل عليها من (10) باعتبار أن ϑ و c ثوابت بشكل مشابه لما سبق .

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{\frac{V'_{x'}+\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}{\frac{1+\frac{\vartheta}{c^2}V'_{x'}}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}=\frac{V'_{x'}+\vartheta}{1+\frac{\vartheta}{c^2}V'_{x'}}\quad ;V'_{x'}=\frac{dx'}{dt'}$$

$$V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{V'_{y'}\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}{1+\frac{\vartheta}{c^2}V'_{x'}}\quad ;V'_{y'}=\frac{dy'}{dt'}\qquad (12)$$

$$V_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{dz}{dt'}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{\frac{dz'}{dt}}{\frac{dt}{dt'}}=\frac{V'_{z'}\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}{1+\frac{\vartheta}{c^2}V'_{x'}}\quad ;V'_{z'}=\frac{dz'}{dt'}$$

ملاحظة : إذا تحرك المنبع M وفق محور موازي لمحور حركة الجملة المتحركة (وفق ox // o'x' المنطبقان) وذلك بغض النظر عن جهة الحركة - انظر الشكل (1) - فإن

$$y=y'=cte\Rightarrow V_y=V'_{y'}=0$$

$$z=z'=cte\Rightarrow V_z=V'_{z'}=0$$

أي أن المراقبين لايسجلان أية سرعة للمتحرك (مركبتي السرعة وفق المحورين oy و oz أو o'y' و o'z' المعامدين لمحور حركة كل من المنبع والجملة ox // o'x' معدومة)

أما بالنسبة للمحور ox أو o'x' المنطبقان حيث $x\neq x'$ عندئذٍ تكون السرع النسبية المسجلة من مراقبي الجملتين هي كما وردت في (11) و (12) على الشكل التالي :

$$V'_{x'} = \frac{V_x - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{c^2} V_x} \qquad V_x = \frac{V'_{x'} + \vartheta}{1 + \frac{\vartheta}{c^2} V'_{x'}} \qquad (13)$$

يمكن الحصول على عبارتي السرعة النسبية للمنبع (الجسم M) الواردة وفق تحويلات غاليليــه (5) من أجل سرعات صغيرة للجملة المتحركة $(\vartheta << c \Rightarrow \frac{\vartheta^2}{c^2} \approx 0)$.

فإذا بلغت سرعة المنبع M (الجسم المتحرك) وفق أحد المراقبين سرعة الضوء c فإن المراقب الآخر سيسجل نفس السرعة c ، ونبرهن على ذلك بالشكل التالي :

$$V'_{x'} = C \quad \Rightarrow V_x = \frac{V'_{x'} + \vartheta}{1 + \frac{\vartheta}{c^2} V'_{x'}} = \frac{C + \vartheta}{C + \vartheta} C = C$$

$$V_x = C \quad \Rightarrow V'_{x'} = \frac{V_x - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{c^2} V_x} = \frac{C - \vartheta}{C - \vartheta} C = C$$

وهذا دليل على كون سرعة الضوء واحدة في كافة جمل المقارنة .

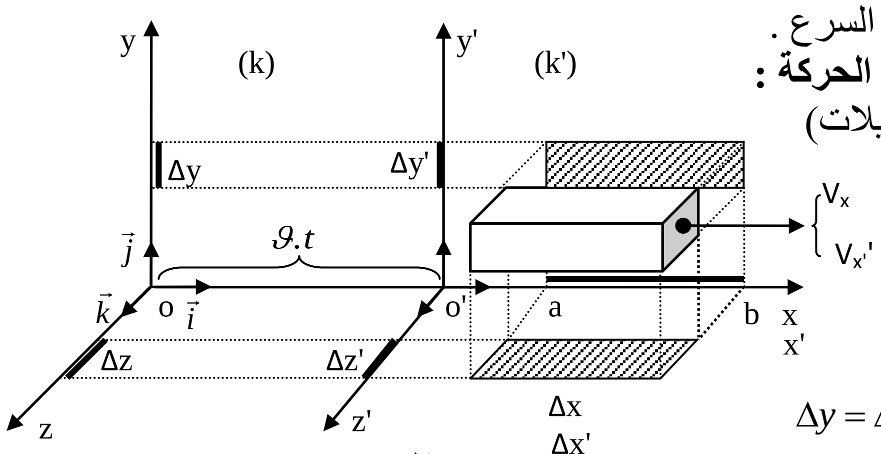
وبما أن o'x' // ox (منطبقان) فإننا نحذف الدليلين x و x' في (13) ونكتب عبارتي السرعة النسبية بالشكل التالي :

$$V' = \frac{V - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{c^2} V} \qquad V = \frac{V' + \vartheta}{1 + \frac{\vartheta}{c^2} V'} \qquad (14)$$

ملاحظة : يمكن الحصول على تحويلات لورانتس النسبية المباشرة والعكسية للتسارع باتباع ذات الخطوات المعتمدة في استنتاج عبارات السرع .

ظاهرة تقلص الأطوال الموازية لمحور الحركة :

نفرض جسم (على هيئة متوازي مستطيلات) أبعاده موضحة كما بالشكل (2) ويتحرك وفق ox بسرعة v نلاحظ أن كِلا المراقبين يقيسان مساقط الأبعاد على المحاور المعامدة بشكلٍ متساوي



شكل (2)

$$\Delta y = \Delta y' = cte$$
$$\Delta z = \Delta z' = cte \qquad (15)$$

أما قياسهما للطول ab الموازي لمحور الحركة فإنه يختلف من مراقب لآخر

فالمراقب (k) يقيس هذا الطول بالشكل $\ell = x_b - x_a$

والمراقب (k') يقيس هذا الطول بالشكل $\ell' = x'_b - x'_a$

وبالاستفادة من التحويلات (9) نجد :

$$\ell' = x'_b - x'_a = \frac{x_b - \vartheta t}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} - \frac{x_a - \vartheta t}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad (16)$$

يتضح من هذه النتيجة أن $\ell < \ell'$ (قياسا المراقبين لهذا الطول مختلفين) وهو ما ندعوه تقلص الأطوال .

مثال : طائرة خارقة للسرعات تطير بسرعة $\vartheta = 0{,}9\,C$ ، يقيس المراقب الساكن في جملة الطائرة طول وعرض وارتفاع عربة المضيفة عندما تقف بقربه فيجد الطول $\ell' = 1m$. والمطلوب حساب طول وعرض وارتفاع العربة الذي يقيسه المراقب الساكن في جملة برج المراقبة الأرضي (في المطار) ؟

الحل : بما أن حركة العربة تحدث في الكريدور المنطبق على محور الطائرة والموازي لاتجاه الطيران ، فيكون عرض العربة وارتفاعها مقدارين منطبقين على المحورين المعامدين لمحور الحركة ، وبالتالي فلن يطرأ أي تعديل من المراقب الأرضي على قياس راكب الطائرة (يتطابق قياسا المراقبين بالنسبة للعرض والارتفاع) حسب (15) .

أما الطول الذي يقيسه المراقب الأرضي فنجده من (16)

$$\ell = \ell'\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} = 1\sqrt{1-0{,}81} = \sqrt{0{,}19} \approx 0{,}436\,m$$

ظاهرة تمدد الأزمنة :

نفرض أن مراقب ('k) يقوم بقياس الزمن الذي تستغرقه إحدى الظواهر الفيزيائية التي تحدث في نفس المكان ، أي أن $x' = cte$ (المختبر الموجود في جملته المتحركة بسرعة ϑ) فيسجل المقدار التالي $\Delta t' = t_2' - t_1'$. في حين يقوم المراقب في (k) بتسجيل هذا الزمن بالشكل التالي $\Delta t = t_2 - t_1$.

وبالاستفادة من (10) نجد :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{\vartheta}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{\vartheta}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad (17)$$

يتضح من هذه النتيجة أن $\Delta t > \Delta t'$ (قياسا المراقبين للفارق الزمني مختلف) . وهو ماندعوه تمدد الأزمنة .

مثال : يضبط رائد فضاء ساعة المنبه لديه لتوقظه من النوم بعد 10 ساعات . والمطلوب حساب مدة نوم رائد الفضاء الذي يسجله المراقب الأرضي ؟ إذا علم أن المركبة الفضائية تسير بسرعة $\vartheta = 0{,}9\,C$

الحل : نطبق (17)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{0{,}19}} \approx 23\ Hor$$

مثال : سافر شقيق التوأم الذي يبلغ من العمر 30 عاماً برحلة فضائية استكشافية استغرقت 10 سنوات في مركبة تسير بسرعة $\vartheta = 0{,}9\,C$ والمطلوب حساب الزمن المنقضي على شقيقه الأرضي .؟

الحل : نطبق (17)

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{10}{\sqrt{0{,}19}} \approx 23\ Years$$

أي أن عمر المسافر يصبح 40 عاماً في حين يصبح عمر شقيقه 53 عاماً (لحظة عودته من السفر) .

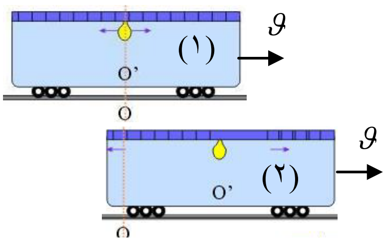
مثال : قطار طويل جداً، طوله $\ell = 5{,}4\times10^6\ km$ يتحرك بسرعة $0{,}8\,c$. يوجد في منتصفه مراقب ساكن 'O ومصباح. ويوجد بابان على جانبيه أحدهما في المقدمة والآخر في المؤخرة. يفتح البابان عندما يصلهما ضوء المصباح. احسب الزمن الذي يُفتح فيه البابان بالنسبة للمراقبين الداخلي والخارجي عندما يبدآن القياس في اللحظة التي يكونان فيها متقابلين

الحل نحسب الزمن الذي يقيسه المراقب 'O

$$t'=\frac{\ell/2}{c}=\frac{2,7\times10^6}{0,3\times10^6}=9\ Sec$$

أي أن البابان يُفتحان معاً بعد مرور زمن ٩ ثواني من إضاءة المصباح

نحسب الزمن الذي يقيسه المراقب الأرضي O



شكل ( )

الزمن المنقضي ليفتح الباب الموجود في المقدمة:

$$t'=\frac{\ell/2}{c+\vartheta}=\frac{2,7\times10^6}{1,8\ c}=\frac{2,7\times10^6}{1,8\times0,3\times10^6}=5\ Sec$$

الزمن المنقضي ليفتح الباب الموجود في المؤخرة:

$$t'=\frac{\ell/2}{c-\vartheta}=\frac{2,7\times10^6}{0,2\ c}=\frac{2,7\times10^6}{0,2\times0,3\times10^6}=45\ Sec$$

الكتلة ، وكمية الحركة ، والقانون الأساسي في التحريك ، في النظرية النسبية الخاصة :

ترتبط الكتلة السكونية m_o بالكتلة الحركية m في النظرية النسبية الخاصة بالعلاقة

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad (18)$$

وهذا يعني أن $m>m_o$ ، وتصبح $m\approx m_o$ من أجل السرعات الصغيرة $\vartheta<<c$.

كمية الحركة ، والقانون الأساسي في التحريك ، في (k) :

$$\vec{p}=m\vec{V}=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\vec{V}\Rightarrow\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\,m\vec{V}}{dt} \qquad (19)$$

كمية الحركة ، والقانون الأساسي في التحريك ، في (k') :

$$\vec{p}'=m\vec{V}'=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\vec{V}' \qquad \Rightarrow\vec{F}'=\frac{d\vec{p}'}{dt'}=\frac{d\,m\vec{V}'}{dt'} \qquad (20)$$

الطاقة الحركية في النظرية النسبية :

نفرض أن الجملة المتحركة (k') عبارة عن كتلة متماسكة m تتحرك حركة انسحابية بسرعة $\vec{\vartheta}$ ، تحت تأثير محصلة القوى $\vec{F}$ المنطبقة على محور الحركة x . فتكون السرعة النسبية لكل نقطة من نقاطها معدومة [وفقاً لقياسات مراقب هذه الجملة] ، لأن الكتلة متماسكة ، أي :

$$V'=0$$

فنجد أن السرعة النسبية التي يرصدها مراقب الجملة (k) لأي من نقط هذه الجملة حسب (14) :

$$V=\vartheta\ .$$

بما أن $\vec{F}$ هي محصلة القوى المؤثرة على نقط هذه الجملة ، فنجد أن قيمتها من وجهة نظر مراقب الجملة (k) تعطى من القانون الأساسي في التحريك ، حسب (19) ، بالشكل التالي :

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d\,mV}{dt}=\frac{d\,m\vartheta}{dt}=m\frac{d\ \vartheta}{dt}+\vartheta\frac{d\,m}{dt}$$

وبتطبيق النظرية الحركية : " العمل الذي تنجزه محصلة القوى المؤثرة في الجملة يساوي للتغير الحاصل في طاقتها الحركية "

$$dT=\vec{F}d\,\vec{x}=Fd\,x=m\frac{d\ \vartheta}{dt}d\,x+\vartheta\frac{d\,m}{dt}d\,x=m\frac{d\,x}{dt}d\ \vartheta+\vartheta\frac{d\,x}{dt}d\,m$$

$$dT=m\ \vartheta d\,\vartheta+\vartheta^2\,d\,m \qquad (a)$$

وبالاستفادة من علاقة الكتلة الحركية بالسكونية (18) نجد :

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \Rightarrow d\,m=\frac{0-m_o\left(\frac{\frac{-2\vartheta}{c^2}}{2\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right)d\,\vartheta}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}=\frac{m_o\,\vartheta}{c^2}\frac{d\,\vartheta}{(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(b)}$$

نعوض قيمة (b) في (a) فنجد :

$$dT=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\;\vartheta\,d\,\vartheta+\vartheta^2\,\frac{m_o\,\vartheta}{c^2}\frac{d\,\vartheta}{(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$dT=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\;\vartheta\,d\,\vartheta\underbrace{\left(1+\frac{\vartheta^2}{c^2(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})}\right)}_{=\frac{1}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}=m_o\,\frac{\vartheta\,d\,\vartheta}{(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

بمكاملة طرفي العلاقة الحاصلة

$$T=\int_0^T dT=m_o\int_0^{\vartheta}\frac{\vartheta\,d\,\vartheta}{(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

نحصل على قيمة التكامل في الطرف الثاني بفرض الوسيط $S=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$ فنجد $C^2\,d\,S=\frac{\vartheta\,d\,\vartheta}{(1-\frac{\vartheta^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$

وبمراعاة حدود التكامل نجد :

$$T=m_o\,c^2\int_1^S d\,S=m_o\,c^2\left[S\right]_1^{1/\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}=\left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}-m_o\right)c^2=(m-m_o)C^2=\Delta m C^2$$

$$\boxed{T=\Delta m C^2} \qquad (21)$$

وهي علاقة آينشتين المعبرة عن التكافؤ بين الكتلة والطاقة الحركية .

فإذا كانت الطاقة الإجمالية E هي طاقة حركية فقط (الطاقة الكامنة معدومة $U=0$) نكتب (21) بالشكل :

$$\boxed{E=\Delta m C^2} \qquad (22)$$

وهي تعني أن الطاقة المتحررة جراء حركة كتلة ما بسرعة ϑ تساوي لجداء الفرق بين قيمتي كتلتها الحركية والسكونية بمربع سرعة الضوء .

فإذا فرضنا أن الجسيم المتحرك هو فوتون (كتلته السكونية معدومة $m_o=0$) ، وكتلته الحركية m ، ويتحرك بسرعة الضوء C ، فإن الطاقة المتحررة هي $E=mC^2$ وبما أن كمية حركته كجسيم هي $p=mC$ فإن عبارة الطاقة تصبح بالشكل التالي $E=c\,p$

إذن الطاقة الإجمالية للفوتون هي طاقة حركية فقط .

<u>مثال :</u> احسب الطاقة المتحررة مقدرةً بـ eV ، جراء تسريع إلكترون حر (كتلته السكونية $m_o=9{,}11\times10^{-31}kg$) ، بسرعة تساوي $\vartheta=0{,}9C$ ، علماً أن $1eV=1{,}6\times10^{-19}J$.

<u>الحل :</u> بدايةً نحسب كتلة الإلكترون الحركية عندما يتحرك بهذه السرعة ، فنجد من (18)

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}=\frac{9{,}11\times10^{-31}}{\sqrt{0{,}19}}\approx 20{,}1\times10^{-31}\ kg$$

بما أن الإلكترون حر فإن طاقته الكامنة معدومة ، وبالتالي فالطاقة الإجمالية هي طاقة حركية ، فتكون الطاقة المتحررة .

$$E=\Delta m C^2=(m-m_o)C^2\approx 11\times10^{-31}\times9\times10^{16}=99\times10^{-15}\,J\approx 62\times10^{4}\,eV$$

<u>مثال :</u> ماهي الطاقة (مقدرةً بـ eV) اللازمة لتخليق كتلة إلكترون واحد ؟

<u>الحل :</u> بما أن $m_e=m-m_o=9{,}11\times10^{-31}\ kg$

$$E=m_e C^2=9{,}11\times10^{-31}\times9\times10^{16}\approx 82\times10^{-15}\,J=\frac{82\times10^{-15}}{1{,}6\times10^{-19}}\ eV=51{,}25\times10^{4}\ eV\approx 0{,}5MeV$$

<u>مثال :</u> ماهي الكتلة المنتجة لطاقة قدرها 1 eV ؟

<u>الحل :</u> من علاقة آينشتين نجد : $m=\frac{E}{C^2}=\frac{1{,}6\times10^{-19}J}{9\times10^{16}}\approx 0{,}178\times10^{-35}kg$

القيم المطلقة في النظرية النسبية : (المجال الخاص والزمن الخاص)

تفيدنا النظرية النسبية الخاصة لآينشتين بمعلومةٍ مفادها أن كل شيء بات نسبياً ، وأنه لاحقيقة للقيم المطلقة للمقادير القابلة للقياس ، فالمكان والزمان مقادير قابلة للقياس ، وقياساتها تختلف باختلاف جملة القياس .
غير أنه في حقيقة الأمر توجد مقادير فيزيائية لامتغيرة يمكن التعرف عليها من وجهة النظر النسبوية ، ندعوها اللامتغيرات الفيزيائية

<u>المتصل المكاني الزماني (S) (اللامتغير الفيزيائي) :</u>

نفرض حادثتين لحظيتين منفصلتين A و B تحدُثان في مكانين مختلفين ، المكان الأول $(1):(x_1,y_1,z_1)$ في اللحظة t_1 ، والمكان الثاني $(2):(x_2,y_2,z_2)$ في اللحظة t_2 .
يمكننا كتابة المسار الضوئي L الذي يمثل المسافة التي يقطعها الضوء في الفراغ خلال الزمن الفاصل بين وقوع الحدثين بالشكل التالي :

$$L=c\,t=c(t_2-t_1)\quad\Rightarrow\quad L^2=c^2\,(t_2-t_1)^2 \qquad (a)$$

وبما أن المسافة الفاصلة بين مكاني وقوع الحدثين هي $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ فإن :

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \qquad (b)$$

نُعرف المتصل المكاني الزماني (S) بالشكل التالي :

$$\boxed{S^2=L^2-r^2\qquad\Rightarrow\qquad S=\sqrt{L^2-r^2}} \qquad (23)$$

إذا كانت الحادثتان تقعان في الجملة (k) نكتب متصلهما S بالشكل :

$$S=\sqrt{c^2\,(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2} \qquad (C)$$

وبنفس الأسلوب إذا كانت الحادثتان تقعان في الجملة (k') نكتب متصلهما S' بالشكل :

$$\boxed{S'^2=L'^2-r'^2\qquad\Rightarrow\qquad S'=\sqrt{L'^2-r'^2}} \qquad (24)$$

$$S'=\sqrt{c^2\,(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2} \qquad (d)$$

سنبرهن أن المتصلين S و S' لامتغيرين فيزيائيين ($S'=S$) :
لذا نجد بالاعتماد على تحويلات لورانتس النسبية المباشرة للمكان والزمن (9) ، أن

$(y'_2 - y'_1)^2 = (y_2 - y_1)^2$ و $(z'_2 - z'_1)^2 = (z_2 - z_1)^2$ (E)

لأن القياسات على المحاور المعامدة لمنحى الحركة تكون متساوية

وبحساب قيمة الحدين $c^2\,(t'_2 - t'_1)^2$ و $(x'_2 - x'_1)^2$ نجد :

$$c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 = c^2\left(\frac{t_2 - \frac{\vartheta}{c^2}\,x_2}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{\vartheta}{c^2}\,x_1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{c^2\left[(t_2 - t_1) - \frac{\vartheta}{c^2}(x_2 - x_1)\right]^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}$$

$$c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 = \frac{c^2(t_2 - t_1)^2 + \frac{\vartheta^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2 - 2\vartheta(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} \qquad \text{(F)}$$

$$(x'_2 - x'_1)^2 = \left(\frac{x_2 - \vartheta\,t_2}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - \vartheta\,t_1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{[(x_2 - x_1) - \vartheta\,(t_2 - t_1)]^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}$$

$$(x'_2 - x'_1)^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + \vartheta^2\,(t_2 - t_1)^2 - 2\vartheta(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} \qquad \text{(G)}$$

من (F) و (G) نجد

$$c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = \frac{c^2(t_2 - t_1)^2 + \frac{\vartheta^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - \vartheta^2\,(t_2 - t_1)^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}$$

$$c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = \frac{-\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)(x_2 - x_1)^2 + (c^2 - \vartheta^2)(t_2 - t_1)^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} = \frac{\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)\left[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2\right]}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}$$

$$c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \qquad \text{(H)}$$

من (E) و (H) نجد تطابق قيمتي (C) و (d) وبالتالي يكون :

$$\boxed{S' = S} \qquad (25)$$

المتصل الزمني والزمن الخاص :

إذا فرضنا أن الحادثتان تقعان في نفس المكان من الجملة (k') ، بفارق زمني $dt' = dt_o$

عندئذٍ يكون $r'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = 0$

فنجد من (25) أن :

$$d\,S = d\,S' = \sqrt{L'^2} = \sqrt{c^2(dt'_2 - dt'_1)^2} = \sqrt{c^2\,dt'^2} = \sqrt{c^2\,dt_o^2}$$

$$d\,S = c\,dt_o \qquad (26)$$

وهي عبارة المتصل الزمني . ندعو dt_o الزمن الخاص بالجملة (k') .

لإيجاد العلاقة التي تربط الزمن الخاص بالجملة (k') dt_o بالزمن dt الخاص بالجملة (k)

نوجد قيمة dS من (C) بالشكل

$$dS = \sqrt{dL^2 - dr^2} = \sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

وبالتعويض في (26) نجد :

$$dt_o = \frac{dS}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

بقسمة الطرفين على dt نجد

$$\frac{dt_o}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\right]}$$

وبما أن $\vartheta = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \Rightarrow \vartheta^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2$ نجد بالتعويض :

$$\boxed{dt_o = \sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}\ \ dt} \qquad (27)$$

يمكن كتابة عبارة الزمن الخاص (27) بالصيغة التكاملية بالشكل التالي :

$$\boxed{t_o = \int \sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}\ \ dt} \qquad (28)$$

<u>المتصل المكاني الخاص والبعد الرابع :</u>

إذا فرضنا أن الحادثتان تقعان بتوقيت واحد في مكانين مختلفين من الجملة (k') ، أي أن $t' = 0$
نجد من (25) أن :

$$S^{\,2} = c^2t^2 - r^2 = c^2t'^2 - r'^{\,2} = -r'^{\,2} \Rightarrow c^2t^{\,2} = -(r'^{\,2} - r^{\,2}) = -\tau^2$$
$$\tau^2 = -c^2t^{\,2} = i^2c^2t^{\,2} \Rightarrow \tau = i\,c\,t \Rightarrow t = -\frac{i}{c}\tau \qquad (29)$$

يمثل τ مسافة ، وهو مقدار تخيلي $\tau = i\,c\,t$.

وإذا فرضنا أن الحادثتان تقعان بتوقيت واحد في مكانين مختلفين من الجملة (k) ، أي أن $t = 0$
نجد من (25) أن :

$$S'^2 = c^2t'^2 - r'^2 = c^2t^{\,2} - r^{\,2} = -r^{\,2} \Rightarrow c^2t'^2 = -(r^2 - r'^2) = -\tau'^2$$
$$\tau'^2 = -c^2t'^2 = i^2c^2t'^2 \Rightarrow \tau' = i\,c\,t' \Rightarrow t' = -\frac{i}{c}\tau' \qquad (30)$$

يمثل τ و τ' البعد الرابع في الجملتين (k) و (k') فتصبح بالشكل (x,y,z,τ) و (x',y',z',τ') .
يمكن إيجاد علاقات التحويل العكسية بدلالة البعد الرابع (10) لمحور الحركة x والزمن t كما يلي :

$$x = \frac{x' - i\,\frac{\vartheta}{c}\tau'}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad -\frac{i}{c}\tau = \frac{-\frac{i}{c}\tau' + \frac{\vartheta}{c^2}\,x'}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \Rightarrow \tau = \frac{\tau' + i\frac{\vartheta}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad (31)$$

مما سبق نستنتج أنه يمكننا اعتبار إحدى الجملتين (k) أو (k') فراغاً رباعي البعد ويتمتع بزمن خاص t_0 .
في حين تبقى الجملة الأخرى فراغاً ثلاثي البعد بزمن عادي t ، ويرتبطان ببعضهما وفق العلاقة (27) .

السرعة في الفراغ الرباعي :

نفرض $\vec{r}\,(x, y, z, \tau)$ شعاع الموضع في الفراغ رباعي البعد ، وأن زمنه الخاص $dt_o = \sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}\ \ dt$

عندئذٍ تعطى السرعة في هذا الفراغ بالعلاقة $\vec{u} = \frac{d\,\vec{r}}{dt_o}$. نوجد مركبات السرعة كما يلي :

$$u_x = \frac{d\,x}{dt_o} = \frac{dx/dt}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{\vartheta_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \wp \quad u_y = \frac{\vartheta_y}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \wp \quad u_z = \frac{\vartheta_z}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

$$u_\tau = \frac{d\,\tau}{dt_o} \quad ;\ \tau = i\,c\,t \Rightarrow\ u_\tau = \frac{d\tau/dt}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad (32)$$

فتكون قيمة السرعة :

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_\tau^2$$

$$u^2 = \frac{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2 - c^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} = \frac{\vartheta^2 - c^2}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} = -c^2 \qquad (33)$$

<u>ملاحظة :</u> من (32) تمثل $(\vartheta_x,\vartheta_y,\vartheta_z)$ مركبات السرعة $\vec{\vartheta}$ في الفراغ الثلاثي البعد ، وأن هذه المركبات مساوية لمركبات السرعة في الفراغ رباعي البعد (u_x,u_y,u_z) عندما $\vartheta << c$

وكما هو ملاحظ فإن مربع السرعة هو مقدار ثابت - مربع سرعة الضوء - (لامتغير فيزيائي) .

التسارع في الفراغ الرباعي :

نحصل على التسارع باشتقاق عبارة السرعة في الفراغ رباعي البعد بالنسبة للزمن الخاص ، $\vec{\alpha} = \frac{d\,\vec{u}}{dt_o}$

نوجد مركبات التسارع باشتقاق مركبات السرعة (32) بالنسبة للزمن الخاص كما يلي :

$$\alpha_x = \frac{du_x}{dt_o} = \frac{du_x}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}^{\frac{dt}{dt_o}} \frac{d}{dt}\left(\overbrace{\frac{\vartheta_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}}^{u_x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\left[\frac{\overbrace{\frac{d\vartheta_x}{dt}}^{a_x}\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} - \vartheta_x\left(\frac{-\frac{2\vartheta}{c^2}\overbrace{\frac{d\vartheta}{dt}}^{a}}{2\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right)}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}\right]$$

$$\alpha_x = \frac{a_x}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_x(\vartheta\ a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2}$$

$$\alpha_y = \frac{a_y}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_y(\vartheta\ a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2} \qquad (34)$$

$$\alpha_z = \frac{a_z}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_z(\vartheta\ a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2}$$

<u>ملاحظة :</u> نجد من (34) أنه عندما $\vartheta << c$ تكون مساقط التسارع في الفراغين الثلاثي والرباعي البعد متساوية $\alpha_x = a_x \ \wp\ \alpha_y = a_y \ \wp\ \alpha_z = a_z$

كما نوجد مركبة التسارع على البعد الرابع τ بالشكل التالي :

$$\alpha_\tau = \frac{d\,u_\tau}{dt_o} = \frac{d\,u_\tau}{dt}\frac{dt}{dt_o} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\;\frac{d}{dt}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\left[0 - \frac{ic\left(\frac{-\frac{2\vartheta}{c^2}\frac{d\vartheta}{dt}}{2\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right)}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}\right] = \frac{i}{c}\,\frac{\vartheta\;a}{\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2} \qquad (35)$$

نتيجة : في الفراغ رباعي البعد يكون شعاعي السرعة $\vec{u}$ والتسارع $\vec{\alpha}$ متعامدان . أي $\vec{u}\;\vec{\alpha}=0$.

البرهان : باشتقاق عبارة السرعة (33) المعطاة في الفراغ رباعي البعد بالنسبة لزمنه الخاص t_o نجد :

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_\tau^2 = -c^2$$

$$2u\frac{du}{dt_o} = 2u_x\frac{du_x}{dt_o} + 2u_y\frac{du_y}{dt_o} + 2u_z\frac{du_z}{dt_o} + 2u_\tau\frac{du_\tau}{dt_o} = 0$$

$$2\;u\;\alpha = 2u_x\alpha_x + 2u_y\alpha_y + 2u_z\alpha_z + 2u_\tau\alpha_\tau = 0 \qquad ;\; 2\neq 0$$

$$\Rightarrow\; u\;\alpha = (u_x+u_y+u_z+u_\tau)(\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z+\alpha_\tau) = 0$$

$$\Rightarrow\qquad u\perp\alpha \qquad (36)$$

موجز في ميكانيك النظرية النسبية

كمية الحركة في الفراغ الرباعي : نجدها من العلاقة $\vec{P} = m_o\,\vec{u}$ حيث $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$

فنجد مساقط كمية الحركة في هذا الفراغ على الشكل

$$P_x = \frac{m_o\,\vartheta_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = m_o\,u_x \;\wp\; P_y = \frac{m_o\,\vartheta_y}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = m_o\,u_y \;\wp\; P_z = \frac{m_o\,\vartheta_z}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = m_o\,u_z \;\wp\; P_\tau = \frac{i\,m_o c}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = m_o\,u_\tau \qquad (37)$$

حيث لدينا كميات الحركة في الفراغ الثلاثي $p_x = m_o\,\vartheta_x \;\wp\; p_y = m_o\,\vartheta_y \;\wp\; p_z = m_o\,\vartheta_z$

معادلة الحركة في الفراغ الرباعي :

نتعرف من القانون الأساسي في التحريك على قوة مينكوفسكي f في الفراغ الرباعي بالشكل التالي :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{P}}{dt_o} = \frac{d\,m_o\,\vec{u}}{dt_o} = m_o\frac{d\,\vec{u}}{dt_o} = m_o\,\vec{\alpha}$$

فنجد بالاستفادة من (34) مساقط القوة في الفراغ الرباعي على الشكل :

$$f_x = m_o\frac{du_x}{dt_o} = m_o\underbrace{\frac{du_x}{dt}}_{\alpha_x}\frac{dt}{dt_o} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\;\alpha_x = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\left[\frac{a_x}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_x(\vartheta\;a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2}\right]$$

$$f_y = m_o \frac{du_y}{dt_o} = m_o \underbrace{\frac{du_x}{dt}}_{\alpha_y} \frac{dt}{dt_o} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \ \alpha_y = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \left[\frac{a_y}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_y(\vartheta\ a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2} \right] \qquad (38)$$

$$f_z = m_o \frac{du_z}{dt_o} = m_o \underbrace{\frac{du_z}{dt}}_{\alpha_z} \frac{dt}{dt_o} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \ \alpha_z = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \left[\frac{a_z}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta_z(\vartheta\ a)}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2} \right]$$

$$f_\tau = m_o \frac{du_\tau}{dt_o} = m_o \underbrace{\frac{du_\tau}{dt}}_{\alpha_\tau} \frac{dt}{dt_o} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \ \alpha_\tau = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \ \frac{i}{c} \ \frac{\vartheta\ a}{\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^2}$$

<u>ملاحظة :</u> نجد من (38) أنه عندما $\vartheta << c$ تكون مساقط التسارع في الفراغين الثلاثي والرباعي البعد متساوية لأن $\alpha_z = a_z \ \wp \ \alpha_y = a_y \ \wp \ \alpha_x = a_x$

أي أن
$$f_x = \frac{m_o\ \alpha_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{m_o\ a_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

وهكذا نجد بالنسبة لبقية المركبات

$$F_z = f_z\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} \quad \text{و} \quad F_y = f_y\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} \quad \text{و} \quad F_x = f_x\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} \qquad (39)$$

المعنى الفيزيائي لمسقط القوة f_τ في الحالة $\vartheta << c$:

بما أن $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ (في الفراغ رباعي البعد) ، فإن $\vec{u} \perp \vec{f}$ وبالتالي فإن $\vec{u}\ \ \vec{f} = 0$

وبالتعويض عن مركبات $\vec{u}$ من (32) ومركبات $\vec{f}$ من (39) نجد :

$$u_x\ f_x + u_y\ f_y + u_z\ f_z + u_\tau\ f_\tau = 0 \qquad (40)$$

$$\underbrace{\frac{F_x\vartheta_x}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{F_x\vartheta_x}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{F_x\vartheta_x}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}_{\Downarrow} + \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\ f_\tau = 0$$

$$\frac{F\vartheta}{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} = -\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\ f_\tau$$

$$f_\tau = \frac{i}{c}\ \frac{F\vartheta}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{i}{c}\ \frac{p_w}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

حيث p_w الاستطاعة المحسوبة في الفراغ ثلاثي البعد