كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة :الثامنة /نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

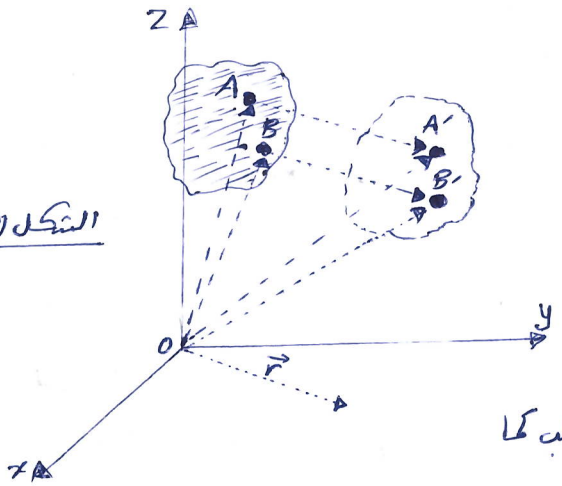
الفصل السادس ⑥: الحركات المختلفة للجسم الصلب

①. الحركة الإنسحابية للجسم الصلب:

تعريفها: هي الحركة التي ينفذها الجسم الصلب وفق متجه الإسحاب $\vec{r}$ الذي له منحى واتجاه محدد؛ بحيث تكون:

- كافة نقاطه متوازية وموازية لـ $\vec{r}$
- وتقوم بسرعة وتسارع واحد.

الشكل ①



البرهان على ذلك: نأخذ نقطتين A و B من الجسم الصلب كما في الشكل ①.

لبرهن على تساوي السرع:

* كما واضح من الشكل: $\frac{dAB}{dt} = \frac{dA'B'}{dt} = 0$ [المسافة بين A و B تبقى ثابتة مع هذه الحركة الإنسحابية]

وبما أن: $|\vec{AA'}| = |\vec{BB'}| = |\vec{r}| = cte$ & $\vec{AA'} // \vec{BB'} // \vec{r}$ ①

فإن: $\frac{d\vec{AA'}}{dt} = \frac{d\vec{BB'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

سنستطيع أن نكتب:

* $\vec{OB'} = \vec{OB} + \vec{BB'} = \vec{OA} + \vec{AA'} + \vec{A'B'}$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة على dt: $d\vec{OB} + d\vec{BB'} = d\vec{OA} + d\vec{AA'} + d\vec{A'B'}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{OB}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OA}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{A'B'}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{OB}}{dt} = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A} \quad ②$$

كما أن المسارعات متساوية:

باستغاقة العلاقة ② بالنسبة للزمن كذلك:

$$\frac{d^2\vec{OB}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A} \quad ③$$

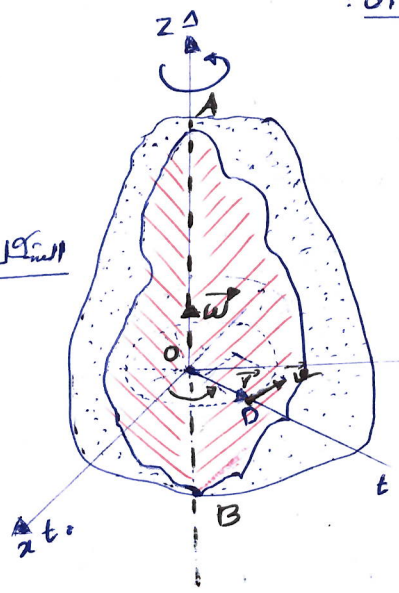
سؤال: عرف الحركة الإنسحابية للجسم الصلب، ثم برهن رياضيا على تساوي السرعة والتسارع لنقطتين منه A و B.

② الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت مار بنقطتين منه ساكنتين من الجسم الصلب :

☒ تعريفها : هي الحركة التي ينفذها الجسم الصلب حول المحور Δ المثبت بنقطتين منه ساكنتين من الجسم (ولتكن A و B) بسرعة زاوية ω . حيث أن :

- جميع نقاط الجسم الصلب [ما عدا نقاط المحور Δ] يقل : D المحددة بمتجه الموضع $\vec{r}$ ترسم عند إتمامها دورة كاملة حول Δ دائرة مركزها H مستويها عمودي على محور الدوران Δ .

الشكل ②



☒ دراسة الحركة الدورانية للجسم الصلب حول Δ :

- لدراسة الحركة الدورانية للجسم الصلب حول Δ ، نُدرس موضع وسرعة وتسارع نقطة منه [النقطة D على سبيل المثال]
- نأخذ معلمة إحداثيات من الشكل ① (O,x,y,z) بحيث ينطبق محورها Oz على محور الدوران ② وينطبق مركزها على مركز الدائرة التي ترسمها D

① تحديد الموضع :

$$\vec{r} = \vec{OD} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{0k} \quad ①$$

صيغته : ② ومتغير الزاوية [الذي يحدد بالزاوية φ]

- ① ثابت السرعة [قيمته المطلقة تساوي نصف قطر الدائرة]

الكاملة بين المستقيمين لـ D في اللحظتين t و t_0 والذي يكون Δ فصلا مشتركا لهما]

② تحديد السرعة :

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_z\vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

وبدلالة المساقط :

$$\vec{v} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j} + 0\vec{k} \quad ②$$

(v_x تحت $-y\omega_z\vec{i}$ ، v_y تحت $x\omega_z\vec{j}$ ، v_z تحت $0\vec{k}$)

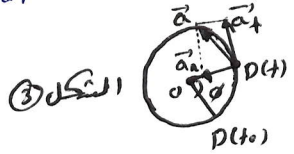
③ تحديد التسارع :

لدينا : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \times \vec{r}] = \vec{\omega'} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega'} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\rightarrow \vec{a} = \underbrace{\vec{\omega'} \times \vec{r}}_{\vec{a_t}} - \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{\vec{a_n}}$

لدينا : $\vec{\omega} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_z\vec{k} \Rightarrow \vec{\omega'} = \omega'_z\vec{k}$

الشكل ③



وبدلالة المساقط :

$$\vec{a} = (-\omega'_z y - \omega^2 x)\vec{i} + (\omega'_z x - \omega^2 y)\vec{j} + 0\vec{k}$$

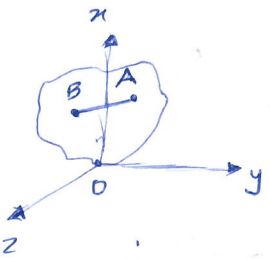
(a_x تحت $(-\omega'_z y - \omega^2 x)\vec{i}$ ، a_y تحت $(\omega'_z x - \omega^2 y)\vec{j}$ ، a_z تحت $0\vec{k}$)

سؤال ② : عرف الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت مار بنقطتين منه ساكنتين من الجسم الصلب ، ثم قم بإيجاد معادلات الحركة .

③ الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة من الجسم الصلب :

تعريفها : هي الحركة الدورانية التي ينجزها الجسم الصلب حول نقطة منه (متماسكة معه) ، بحيث تبقى إحداثياتها ثابتة بالنسبة للجملة التي نتم فيها دراسة هذه الحركة .

دراسة الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة منه :



- لدراسة الحركة ندرس الوضع والسرعة والتسارع لنقطة منه في كل لحظة زمنية .
- لمعرفة الوضع نختار ثلاث نقاط منه $O(0,0,0)$ ، $A(x_1,y_1,z_1)$ ، $B(x_2,y_2,z_2)$ و نحسب المسافات الفاصلة بينها :

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=cte_1 \quad \& \quad \overline{OB}=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=cte_2 \quad \& \quad \overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=cte_3 \quad (1)$$

① **تحديد الوضع** : كخلاصة يمكن تحديد موضع نقطة ما D من الجسم الصلب [الذي يدور حول نقطة ثابتة منه ، باعتبارها A أو B] من خلال :

(أ) التعرف على المسافات الواردة في العلاقات (1)

(ب) ومن ثم حساب زوايا أولر الدورانية الموافقة في اللحظة t

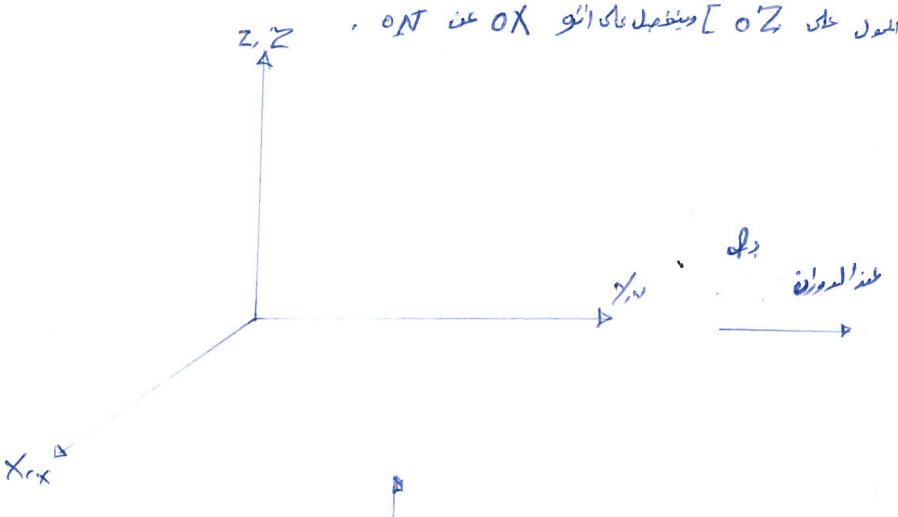
زوايا أولر الدورانية :

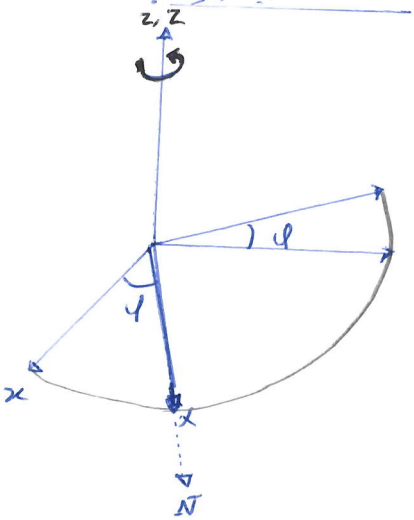
- نأخذ معلما ثابتا $(oxyz)$ ومعلما $(OXYZ)$ المتحرك دورانيا ، ونقترن في النقطة الثابتة مركز عملية الإرشاد ،
- نفرض أن الجسم الصلب قد دقق دورانا صغيرا (جزئيا) يرمز له بالعلاقة :

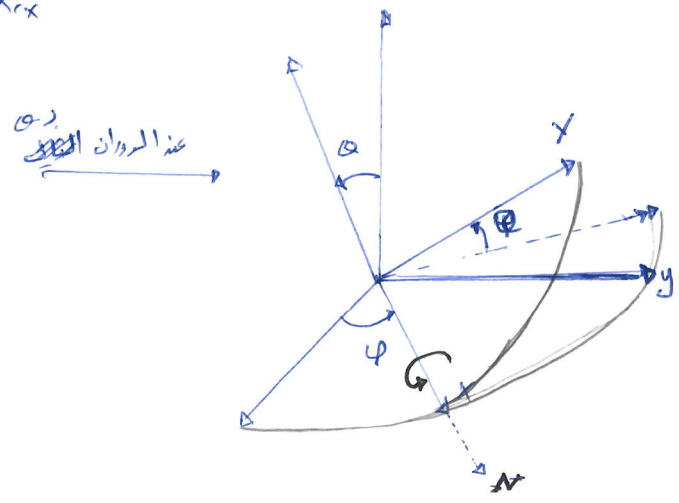
$$d\vec{\Gamma}=d\vec{\varphi}+d\vec{\psi}+d\vec{\omega}$$

- حيث $d\vec{\varphi}=d\varphi\,\vec{k}$ [مساو عنصر الدوران المحمول على oz] ومنحاه ينطبق المحور OZ عن ox ليطبق على محور العقد ON .
- حيث $d\vec{\omega}=d\omega\,\vec{N}$ [مساو عنصر الدوران المحمول على ON] ومنحاه ينطبق OZ عن oz
- حيث $d\vec{\psi}=d\psi\,\vec{k}$ [مساو عنصر الدوران المحمول على OZ] وينطبق على الأقل OX عن ON .

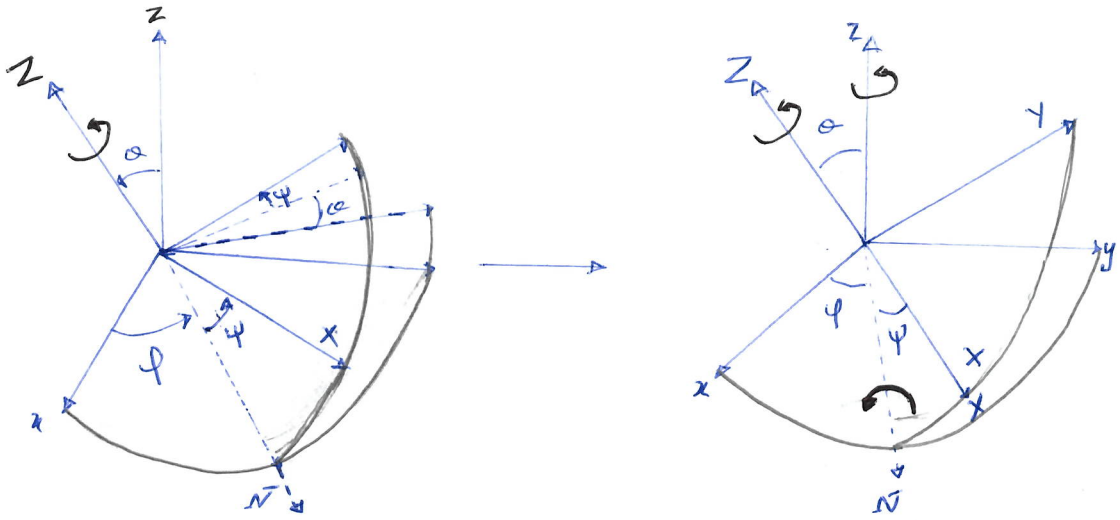
* **تشكل زوايا أولر** :



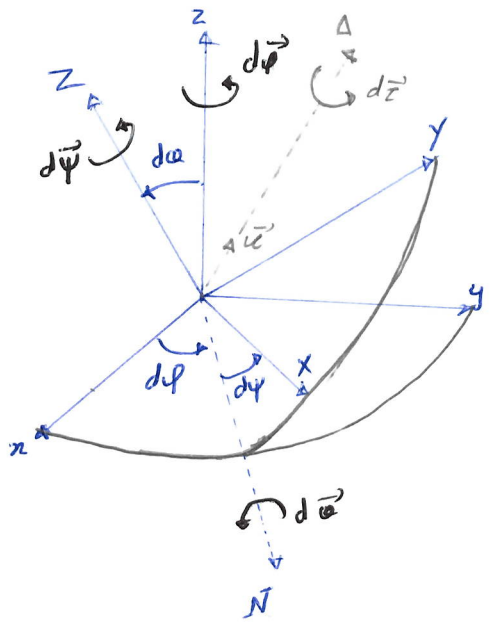




عند الدوران بـ ψ



- وعند حدوث الدوران الثلاثة $[d\vec{\theta}\ ,\ d\vec{\alpha}\ ,\ d\vec{\psi}]$ للحلقة $OXYZ$ حول المحاور $(O'Z\ ;\ ON\ ;\ Oz)$ نحصل على الشكل:



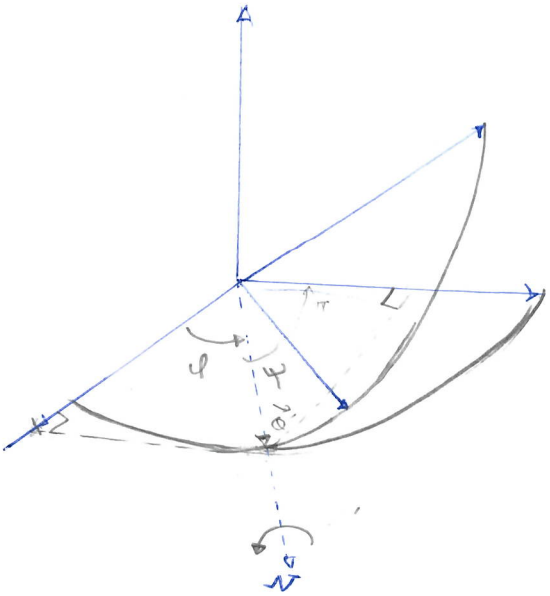
② توزيع السرع في الحلقة التابعة والمتحركة:

لدينا $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \frac{d\vec{\psi}}{dt} + \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{K} + \dot{\alpha}\vec{N}$$

نوضح مساقط $\vec{\omega}$ في الحلقة التابعة: $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$:

حيث: $\omega_x = \varphi'_x + \psi'_x + \alpha'_x$ و $\omega_y = \varphi'_y + \psi'_y + \alpha'_y$ و $\omega_z = \varphi'_z + \psi'_z + \alpha'_z$



لدينا من الشكل:

$$\varphi' \begin{cases} \varphi'_x = \varphi' \sin\alpha \sin\psi \\ \varphi'_y = \varphi' \sin\alpha \cos\psi \\ \varphi'_z = \varphi' \cos\alpha \end{cases}$$

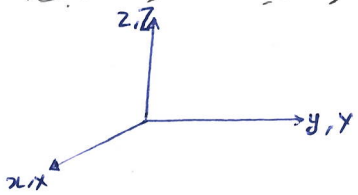
$$\psi' \begin{cases} \psi'_x = 0 \\ \psi'_y = 0 \\ \psi'_z = \psi' \end{cases} \qquad \alpha' \begin{cases} \alpha'_x = \alpha' \cos\varphi \\ \alpha'_y = -\alpha' \sin\psi \\ \alpha'_z = 0 \end{cases}$$

وظيفة (4) :

① . ارسم أشكالاً توضح فيه شكل زوايا أولر مع الشرح المختصر الموافق . موضحاً ذلك بالرسم المناسب

② . أوجد مساقط السرعة الزاوية $\vec{\Omega}$ أولاً في الحالة الثابتة ثم في الحالة المتحركة ثم أوجد السرعة الخطية المواقفة في كلا الحالتين

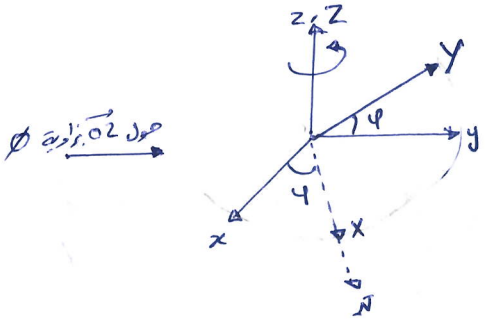
③ . أوجد التسارع في الحالتين الثابتة والمتحركة .



الجواب :

أولاً . نقوم بإجراء ثلاث دورانات :

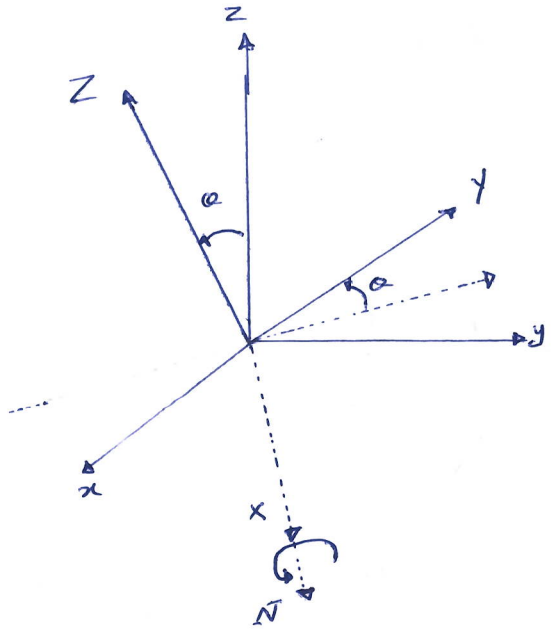
① * دوران بزاوية ϕ حول المحور $\vec{oz}$:



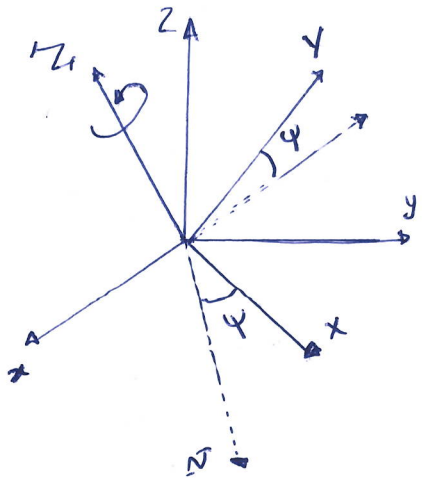
حول $\vec{ON}$ بزاوية θ

② * دوران بزاوية θ حول المحور $\vec{ON}$:

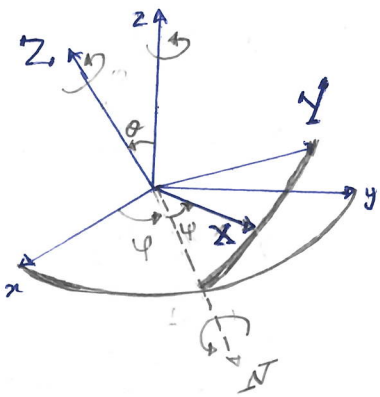
③ * دوران بزاوية ψ حول $\vec{oZ_1}$:



حول oZ_1 بزاوية ψ



الشكل النهائي بعد الدوران (ϕ, θ, ψ)



ثانياً . لدينا سقاط السرعة الزاوية :

$$d\vec{\tau} = d\vec{\phi} + d\vec{\psi} + d\vec{\theta}$$

فتكون السرعة الزاوية : $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} + \frac{d\vec{\psi}}{dt} + \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \phi'\vec{k} + \psi'\vec{K} + \theta'\vec{N}$

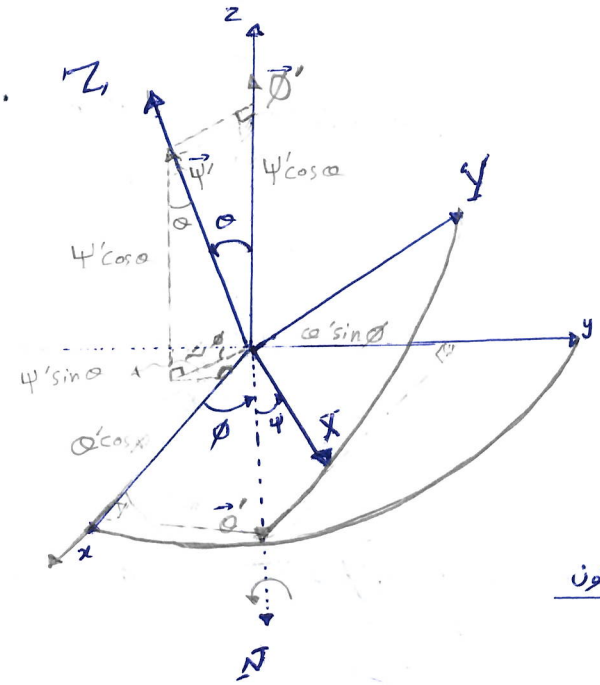
* في الجملة الثابتة $(oxyz)$:

- نريد ان نوجد $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$ علماً أن :

$$\omega_x = \phi'_x + \psi'_x + \theta'_x$$

$$\omega_y = \phi'_y + \psi'_y + \theta'_y$$

$$\omega_z = \phi'_z + \psi'_z + \theta'_z$$



الشكل ① مسقط (ϕ, θ, ψ) في الجملة الثابتة

لدينا $\phi' \begin{cases} \phi'_x = 0 \\ \phi'_y = 0 \\ \phi'_z = \phi' \end{cases}$ ؛ $\psi' \begin{cases} \psi'\sin\theta\sin\phi \\ -\psi'\sin\theta\cos\phi \\ \psi'\cos\theta \end{cases}$ ؛ $\theta' \begin{cases} \theta'\cos\phi \\ \theta'\sin\phi \\ 0 \end{cases}$

وعليه يكون :

$$\omega_x = \psi'\sin\theta\sin\phi + \theta'\cos\phi$$

$$\omega_y = -\psi'\sin\theta\cos\phi + \theta'\sin\phi$$

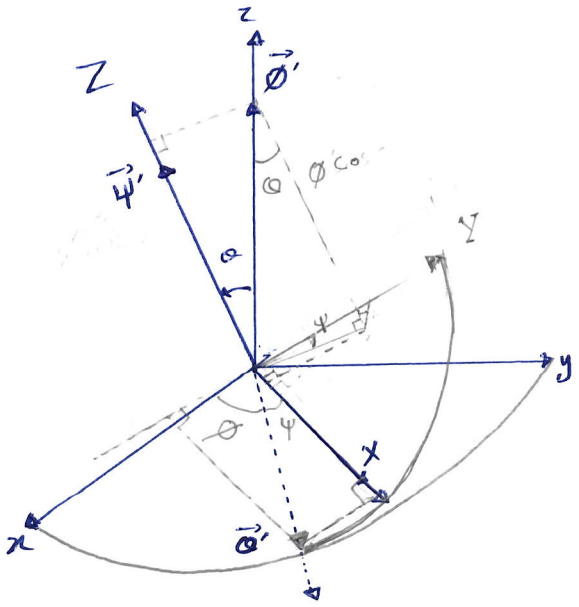
$$\omega_z = \phi' + \psi'\cos\theta$$

إيجاد السرعة الخطية المواقفة $\vec{v_e}$:

لدينا : $\vec{v_e} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (سقاط الموضع في الجملة الثابتة) و $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{v_e} = \underbrace{(\omega_y z - \omega_z y)}_{v_{ex}}\vec{i} + \underbrace{(\omega_z x - \omega_x z)}_{v_{ey}}\vec{j} + \underbrace{(\omega_x y - \omega_y x)}_{v_{ez}}\vec{k}$$

الشكل ② مسقط (ϕ, θ, ψ) في الجملة المتحركة



* في الجملة المتحركة $(oXYZ)$:

نريد ان نوجد $\vec{\omega} = \omega_X\vec{I} + \omega_Y\vec{J} + \omega_Z\vec{K}$

$$\omega_X = \phi'_X + \psi'_X + \theta'_X$$

$$\omega_Y = \phi'_Y + \psi'_Y + \theta'_Y$$

$$\omega_Z = \phi'_Z + \psi'_Z + \theta'_Z$$

لدينا من الشكل $\phi' \begin{cases} \phi'_x = \phi' \sin\theta \sin\psi \\ \phi'_y = \phi' \sin\theta \cos\psi \\ \phi'_z = \phi' \cos\theta \end{cases}$; $\psi' \begin{cases} \psi'_x = 0 \\ \psi'_y = 0 \\ \psi'_z = \psi' \end{cases}$; $\theta' \begin{cases} \theta'_x = \theta' \cos\psi \\ \theta'_y = -\theta' \sin\psi \\ \theta'_z = 0 \end{cases}$

وعليه يكون : $w_x = \phi' \sin\theta \sin\psi + \theta' \cos\psi$

$w_y = \phi' \sin\theta \cos\psi - \theta' \sin\psi$

$w_z = \theta' \cos\theta + \psi'$

إيجاد السرعة الخطية الواحدة $\vec{v}$ في الجملة المركبة :

$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$ حيث $\vec{r} = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}$ و $\vec{w} = w_x\vec{I} + w_y\vec{J} + w_z\vec{K}$

فيكون : $\vec{v} = (w_y z - w_z y)\vec{I} + (w_z x - w_x z)\vec{J} + (w_x y - w_y x)\vec{K}$

ثالثاً

إيجاد التسارع في الجملة الثابتة $(O\,x\,y\,z)$:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \vec{w}' \times \vec{r} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$

$\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{r}) - w^2\vec{r} \Rightarrow \vec{a} = \vec{w}' \times \vec{r} + \vec{w}(\vec{w} \cdot \vec{r}) - w^2\vec{r}$

وحيث أن : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} \Rightarrow \vec{w}' = w'_x\vec{i} + w'_y\vec{j} + w'_z\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{w}' \times \vec{r} = (w'_y z - w'_z y)\vec{i} + (w'_z x - w'_x z)\vec{j} + (w'_x y - w'_y x)\vec{k}$

وحيث أن : $\vec{w} \cdot \vec{r} = w_x \cdot x + w_y \cdot y + w_z \cdot z$

نكتب :

$a_x = w'_y z - w'_z y + w_x(w_x \cdot x + w_y \cdot y + w_z \cdot z) - w^2 x$

$a_y = w'_z x - w'_x z + w_y(w_x \cdot x + w_y \cdot y + w_z \cdot z) - w^2 y$

$a_z = w'_x y - w'_y x + w_z(w_x \cdot x + w_y \cdot y + w_z \cdot z) - w^2 z$

إيجاد التسارع في الحملة المتحركة الدوارة (OXYZ) :

لدينا : $\vec{a} = a_X \vec{I} + a_Y \vec{J} + a_Z \vec{K}$ حيث $\vec{a} = \vec{\omega}' \times \vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega}.\vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$

والمعادلة $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ ثابتة بشدة ومتغيرة اتجاهاً :

ومن ثم : $\vec{\omega}' = \omega_X' \vec{I} + \omega_Y' \vec{J} + \omega_Z' \vec{k} + \underbrace{\omega_X \vec{I}' + \omega_Y \vec{J}' + \omega_Z \vec{k}'}_{*}$

ويمكن : $(*) = \omega_X (\vec{\omega} \times \vec{I}) + \omega_Y (\vec{\omega} \times \vec{J}) + \omega_Z (\vec{\omega} \times \vec{k})$

$= \vec{\omega} \times [\omega_X \vec{I} + \omega_Y \vec{J} + \omega_Z \vec{k}] = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$

إذاً : $\vec{\omega}' = \omega_X' \vec{I} + \omega_Y' \vec{J} + \omega_Z' \vec{k}$

وعليه : $\vec{\omega}' \times \vec{r} = (\omega_Y' Z - \omega_Z' Y)\vec{I} + (\omega_Z' X - \omega_X' Z)\vec{J} + (\omega_X' Y - \omega_Y' X)\vec{k}$

كما أن : $\vec{\omega}.\vec{r} = \omega_X . X + \omega_Y . Y + \omega_Z . Z$

ومن ثم نكتب :

$$a_X = \omega_Y' Z - \omega_Z' Y + \omega_X (\omega_X . X + \omega_Y . Y + \omega_Z . Z) - \omega^2 X$$

$$a_Y = \omega_Z' X - \omega_X' Z + \omega_Y (\omega_X . X + \omega_Y . Y + \omega_Z . Z) - \omega^2 Y$$

$$a_Z = \omega_X' Y - \omega_Y' X + \omega_Z (\omega_X . X + \omega_Y . Y + \omega_Z . Z) - \omega^2 Z$$

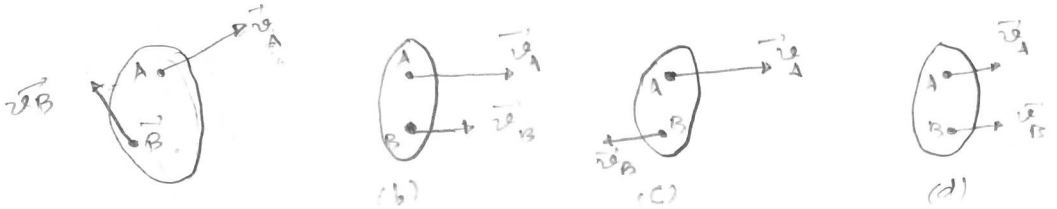
وهو المطلوب

المركز الآني للدوران :

- هي النقطة والتي من أجلها يكون مقدار السرعة الخطية لأي نقطة من نقاط الجسم الصلب معدوما "(تقاطعا)" مع نصف قطر الدوران (المستقيم المار بالمركز الآني والنقطة المدروسة)

سؤال :

إذا علمنا سرعتي نقطتين A و B واقعتين في المستوي المرتبط بالجسم الصلب كما هو موضح بالأشكال التالية.
والمطلوب: أعد رسم الأشكال موضحا على كل منها المركز الآني للدوران



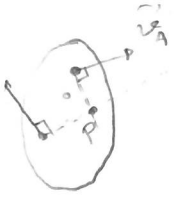
الحل :

نعلم أن المركز الآني هي النقطة والتي من أجلها يكون مقدار السرعة الخطية لأي نقطة من نقاط الجسم الصلب في حالة تقاصد ← نصف قطر الدوران (نصف القطر الواصلة بين النقطة المدروسة والمركز الآني)

الحالة (a) :

- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ [مختلفتان من حيث مقدارهما وغير متوازيان]

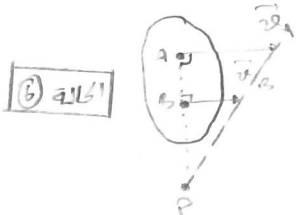
- المركز الآني هو نقطة تقاطع العموديين على $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$.



الحالة (b) :

- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ [مختلفتان من حيث مقدارهما ومتوازيان]

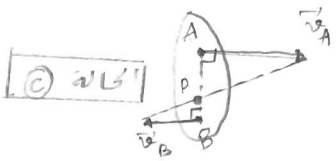
- المركز الآني هو نقطة تقاطع المستقيم المار بنهايتي $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ بالعمود على $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$



الحالة (c) :

- $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ [مختلفتان من حيث مقدارهما واتجاهاً ولكنهما متوازيان] :

- المركز الآني هو نقطة تقاطع المستقيم المار بنهايتي $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$ بالعمود على $\vec{v}_A$ و $\vec{v}_B$



الحالة (d) :

- $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ [متساويتان مقدارا واتجاها ومتوازيتان]

- المركز الآني للدوران باتباع نفس الخطوات في الحالة (b) غير موجود [أو يمكن القول أنه يقع في اللانهاية].