كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : ٦+٧ /نظري/كتابة

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

فيمكن كتابة جملة العلاقات الأخيرة بدلالة تنسور المطالة I_{jk} بالشكل :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_x & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & +I_z \end{pmatrix}}_{I_{jk}} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

والذي نكتبه بالشكل : $L_i = \sum_k I_{ik} w_k$ و $i, k = \begin{cases} 1 \equiv x \\ 2 \equiv x \\ 3 \equiv z \end{cases}$ & $\begin{cases} I_{xx} = I_x \\ I_{yy} = I_y \\ I_{zz} = I_z \end{cases}$

تطبيق ① :

* أوجد مركبات العزم الحركي لجسم يدور في المستوى xoy حول (oz) .

لدينا في هذه الحالة : $\vec{w} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + w_z\vec{k}$

ومنه نجد يكون : $L_x = -I_{xz}\, w_z$ & $L_y = -I_{yz} w_z$ & $L_z = I_z w_z$

تطبيق ② :

* أوجد مركبات العزم الحركي لجسم منسوبة لمحاور عطالته المركزية (الحالة التي ينطبق مبدؤها على C)

في هذه الحالة تكون جداءات العطالة معدومة : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

وعليه فإن : $L_x = I_x w_x$ & $L_y = I_y w_y$ & $L_z = I_z w_z$

سؤال :

أكتب مركبات العزم الحركي (L_x, L_y, L_z) بدلالة تنسور العطالة ومركبات السرعة الزاوية (w_x, w_y, w_z)

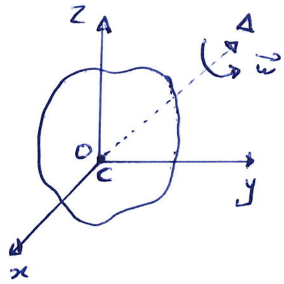
ثم أجب عما يلي :

① . أوجد مركبات العزم الحركي لجسم يدور في المستوي (xoy) حول oz .

② . أوجد مركبات العزم الحركي لجسم منسوبة لمحاور عطالته المركزية (الحالة التي ينطبق مبدؤها على C) .

⊠ : العزم الحركي لجسم صلب يدور حول نقطة ثابتة منه أو محور Δ مار بها بدلالة عزم العطالة وجداءاتها :

- ليكن لدينا الجسم الصلب الموضح بالشكل :



- لندرس عزم الحركة الدوراني لعنصر الكتلة dm منه حول Δ والمحدد بشعاع الموضع $\vec{r}$ التالي :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{[الثابت السرعة والمتغير الاتجاه]} \quad ①$$

والسرعة الزاوية :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad ②$$

فيكون : $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{P} = \vec{r} \times \vec{v}\, dm = [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]\, dm$

وباستخدام العلاقة حيث المكافئة نجد : $\vec{L} = \int [r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}]\, dm \quad ③$

وبالتعويض عن ① و ② في ③ نجد أن :

$$\vec{L} = \int [(x^2+y^2+z^2)(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})]\, dm$$

$$= \int [\omega_x (x^2+y^2+z^2)\vec{i} + \omega_y (x^2+y^2+z^2)\vec{j} + \omega_z (x^2+y^2+z^2)\vec{k} - x^2\omega_x \vec{i} - xy\omega_y \vec{i} - xz\omega_z \vec{i}$$
$$- xy\omega_x \vec{j} - y^2\omega_y \vec{j} - yz\omega_z \vec{j} - zx\omega_x \vec{k} - zy\omega_y \vec{k} - z^2\omega_z \vec{k}]\, dm$$

بتجميع الحدود المتشا $\Rightarrow$

$$\vec{L} = [\omega_x \underbrace{\int (y^2+z^2)\, dm}_{I_x} - \omega_y \underbrace{\int xy\, dm}_{I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int xz\, dm}_{I_{xz}}]\vec{i} +$$
$$[\omega_y \underbrace{\int (x^2+z^2)\, dm}_{I_y} - \omega_x \underbrace{\int yx\, dm}_{I_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int yz\, dm}_{I_{yz}}]\vec{j} +$$
$$[\omega_z \underbrace{\int (x^2+y^2)\, dm}_{I_z} - \omega_x \underbrace{\int zx\, dm}_{I_{xz}} - \omega_y \underbrace{\int yz\, dm}_{I_{yz}}]\vec{k}$$

وبما أنه : $L = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$ فيكون :

$$L_x = I_x \omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_y \omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z$$
$$L_z = I_z \omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y$$

or

$$\begin{cases} L_x = I_x \omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y = -I_{xy}\omega_x + I_y \omega_y - I_{yz}\omega_z \\ L_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z \omega_z \end{cases}$$

إذن: $I_x = I_y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}MR^2\right) + \frac{3}{5}Mh^2 = \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) \Rightarrow \boxed{I_x = I_y = \frac{3}{20}M(R^2+4h^2)}$

حساب جداءات العطالة:

- جداءات العطالة المتعلقة بمحور التناظر الدوراني تكون معدومة، أي:

$\boxed{I_{yz} = I_{xz} = 0}$

ومعلوم: $I_{xy} = \int xy\,dm = \rho\pi\int xy\,r^2 dz$

ومن الشكل الملاحظ أن: $x = y = r \Rightarrow I_{xy} = \rho\pi\int r^4 dz$; $\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow dz = \frac{h}{R}dr$

$\Rightarrow I_{xy} = \frac{\rho\pi h}{R}\int_0^R r^4 dr \Rightarrow I_{xy} = \frac{\rho\pi h}{R}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{1}{5}\frac{\rho\pi h}{R}.R^5$

$\Rightarrow I_{xy} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\rho\pi h R^2\right)R^2 \Rightarrow \boxed{I_{xy} = \frac{3}{5}MR^2 \;;\; M = \frac{1}{3}\rho\pi h R^2}$

3.

نعلم أن: $I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_x + \frac{I_z}{2} \Rightarrow I_0 = \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) + \frac{3}{20}MR^2$

$\Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{3M}{10}(R^2+2h^2)}$

4. لدينا oz و Cz_1 متطابقان ⟸ يكون I_z نفسه في كلا الحالتين، أي:

$\boxed{I_z = I_{z_1} = \frac{3}{10}MR^2}$

لحساب I_X و I_Y نطبق هويغنز الثانية:

$I_\Delta = I_{\Delta C} + Md^2 \Rightarrow I_{\Delta C} = I_\Delta - Md^2$

وبما أن: $d = OC = \frac{3}{4}h$ ، $I_{\Delta C}$ يطابق كلاً من I_X و I_Y و I_Δ يطابق كلاً من I_x و I_y نكتب:

$I_X = I_Y = \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) - \frac{9}{16}Mh^2 = \frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) \Rightarrow \boxed{I_X = I_Y = \frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)}$

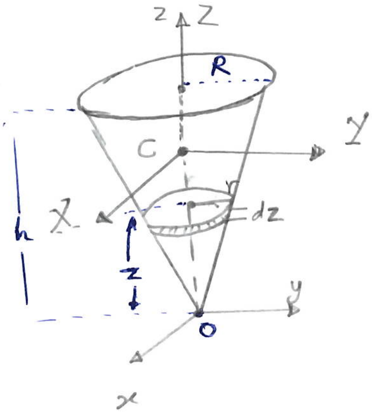
جداءات العطالة المتعلقة بهذه الجملة معدومة لأن مركزها مركز الكتل، أي:

$\boxed{I_{XY} = I_{XZ} = I_{ZY} = 0}$

5.

$I_C = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_{Z_1}) = I_X + \frac{I_{Z_1}}{2} = \frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) + \frac{3}{20}MR^2 = \frac{3}{20}M\left(2R^2+\frac{h^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \boxed{I_C = \frac{3}{20}M\left(2R^2+\frac{h^2}{4}\right)}$



① حساب إحداثيات مركز الثقل C :

محور تناظر المخروط b OZ ⇐ مركز عطالته يقع على محور تناظره الدوراني OZ ⇐

نكتفي بإيجاد Z_c ، ومنه:

$$Z_c = \frac{1}{M}\iiint z\, dm$$

من الشكل: $dm = \underbrace{\pi r^2 dz}_{dV} \cdot \rho$ & $M = \rho \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\pi R^2 h}_{V}$

ومنه: $Z_c = \frac{3}{R^2 h}\int z r^2 dz$

ومن تشابه المثلثات: $\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h} z \Rightarrow Z_c = \frac{3}{R^2 h} \times \frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3 dz = \frac{3}{h^3}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h$

$\Rightarrow Z_c = \frac{3}{h^3}\cdot\frac{h^4}{4} = \frac{3}{4}h \Rightarrow Z_c = \frac{3}{4}h$ إذن: $\boxed{C(0,0,\frac{3}{4}h)}$

② بما أن OZ محور تناظر دوراني فإن:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}(I_x + I_y)$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2}\left[\int (y^2+z^2)dm + \int (x^2+z^2)dm\right] = \frac{1}{2}\int (x^2+y^2)dm + \int z^2 dm$$

$$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z + I_{xoy}$$

حساب I_z : نعلم أن عزم عطالة شريحة على شكل قرص [نصف قطرها r وسماكتها dz كما في الشكل] كتلتها $dm = \rho\pi r^2 dz$ فتكون حول محور مار بمركز ثقلها وعمودي على مستويها يكتب بالشكل:

$$dI_z = \frac{1}{2} r^2 dm \Rightarrow dI_z = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dz \quad ; \quad \frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow dz = \frac{h}{R}dr$$

وبالمكاملة على المجال $[0,R]$ نجد:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^R \frac{1}{2}\rho\pi r^4 \frac{h}{R} dr = \frac{1}{2}\frac{\rho\pi h}{R}\int_0^R r^4 dr = \frac{1}{2}\frac{\rho\pi h}{R}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho\pi h}{R}\cdot\frac{R^5}{5} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{10}\rho\pi h R^4}$$

وبدلالة كتلة المخروط: $M = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 h \Rightarrow I_z = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}\rho\pi h R^2\right)R^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_z = \frac{3}{10} M R^2 \; ; \; M = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 h}$$

حساب I_{xoy} :

$$I_{xoy} = \int z^2 dm = \rho\pi\int r^2 z^2 dz \quad ; \quad \frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow r^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2$$

$$\Rightarrow I_{xoy} = \frac{\rho\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^4 dz = \frac{\rho\pi R^2}{h^2}\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{5}\rho\pi R^2 h^3 = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\rho\pi h R^2\right)h^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{xoy} = \frac{3}{5} M h^2 \; ; \; M = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 h}$$

$$I_{\Delta c} = \rho \pi R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15} \rho \pi R^3 = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\rho \pi R^3\right) R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\Delta c} \overset{= I_R}{=} \frac{2}{5} M R^2 \ ; \ M = \frac{4}{3}\rho \pi R^3}$$

.②

نظرية هويغنز الثانية : $I_{\Delta'} = I_{\Delta c} + MR^2 = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta'} = \frac{7}{5} MR^2}$

.③

نعلم أنّ : $I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

وهنا يمكن اعتبار الثلاثية المتعامدة بمثابة محاور قطرية متعامدة تمر بمركز الثقل وعزوم الدوران حولها متساوي وتساوي I_R ومنه :

$$I_o = \frac{3}{2} I_R = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} M R^2 \Rightarrow \boxed{I_o = \frac{3}{5} M R^2}$$

تطبيق ⑨ :

مخروط دوراني متجانس ومصمت، نصف قطر دائرة قاعدته R وارتفاعه h، وزاوية رأسه 2α، ومعادلة سوقه على محيط V بكثافة حجمية ρ منتظمة. نثبت رأسه في مبدأ جملة الإحداثيات الثابتة (o, x, y, z) بحيث يستطيع الدوران حول محور تناظره الدوراني oz. والمطلوب حساب ما يلي :

① . احداثيات مركز ثقله C

② . عزوم المطالة الدورانية حول محاور جملة الإحداثيات الثابتة (o, x, y, z) وجداءات المطالة المتعلقة بمحاور هذه الجملة.

③ . عزم المطالة الدوراني حول مبدأ الإحداثيات (o)

④ . عزوم المطالة الدورانية حول محاور جملة الإحداثيات المركزية التي مبدؤها مركز الثقل (C, X, Y, Z) وجداءات المطالة المتعلقة بهذه المحاور.

⑤ . عزم المطالة الدوراني حول مبدأ هذه الجملة C

نظرية هويغنز الثانية : $dI_{\Delta c''} = dI_{\Delta 0} + x^2 dm = \frac{1}{2}R^3\sigma\, 2\pi dx + x^2\sigma\, 2\pi R dx$

ـ بالمكاملة على المجال $[0, \ell/2]$ ومن ثم ضرب الناتج بـ 2 (لأن طول الحلقة ℓ) :

$$I_{\Delta c''} = 2\int_0^{\ell/2} dI_{\Delta c''} = 2\times\frac{1}{2}R^3\sigma\, 2\pi\int_0^{\ell/2} dx + 4\pi\sigma R\int_0^{\ell/2} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi\sigma\ell R)R^2 + (2\pi\sigma\ell R)\frac{\ell^2}{12}$$

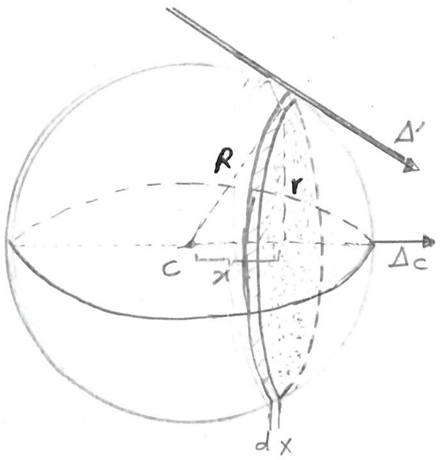
$$\Rightarrow \boxed{I_{\Delta c''} = M\left(\frac{R^2}{2} + \frac{\ell^2}{12}\right)}$$

نظرية هويغنز الثالثة : $I_{\Delta'''} = I_{\Delta c} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta c''} = M\left(\frac{R^2}{2} + \frac{\ell^2}{3}\right)}$ .4

تطبيق 7 :

أوجد عزم عطالة كرة مصمتة نصف قطرها R وذلك إذا علمت أنها متجانسة وأن مادتها موزعة على حجمها V بكثافة حجمية منتظمة ρ من الحالات التالية :

1. عندما تدور حول أحد محاورها القطرية $\Delta_c = R$ (المحور المار بمركز ثقلها)
2. عندما تدور حول محور Δ' مماس سطحها
3. عندما تدور حول مركز ثقلها C



الجواب :

1. نأخذ شريحة على هيئة قرص نصف قطرها r وسماكتها dx وتبعد عن مركز الثقل C مسافة x فتكون كتلتها :

$$dm = \rho\pi r^2 dx \quad ; \quad r^2 = R^2 - x^2$$

ـ ثم إن عزم عطالة قرص [هنا الشريحة قرصية الشكل] حول محور مار بمركز ثقله وعمودي على مستويه (مثل Δc) يعطى بالعلاقة :

$$[\text{التطبيق 9}]\quad dI_{\Delta c} = \frac{1}{2}r^2 dm \Rightarrow dI_{\Delta c} = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - x^2)^2 dx$$

$$\Rightarrow dI_{\Delta c} = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 dx - \rho\pi R^2 x^2 dx + \frac{1}{2}\rho\pi x^2 dx$$

وبالمكاملة على المجال $[0-R]$ وضرب الناتج بـ 2 نحصل على عزم عطالة الكرة كاملة حول Δc أي :

$$I_{\Delta c} = 2\int_0^R I_{\Delta c} = \rho\pi R^4\int_0^R dx - 2\rho\pi R^2\int_0^R x^2 dx + \rho\pi\int_0^R x^4 dx$$

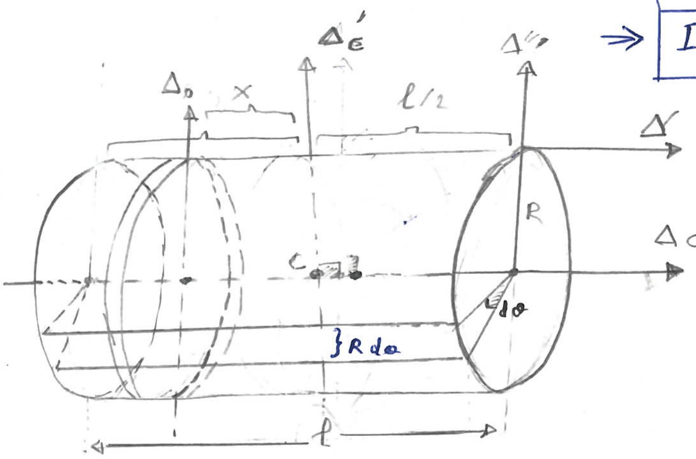
③. عزم العطالة حول Δ_c العمودي على مستوى الحلقة يساوي مجموع عزمي العطالة حول محورين متعامدين واقعين في مستوى الحلقة [المحور Δ_c'' والمحور الواقع في نفس R] ونكتب:

$$I_{\Delta c} = 2 I_R = 2 I_{\Delta_c''} \Rightarrow I_{\Delta_c''} = \frac{I_{\Delta c}}{2} \Rightarrow \boxed{I_{\Delta_c''} = \frac{1}{2} M R^2}$$

④.

نستخدم نظرية هويغنز الثانية: $I_{\Delta'''} = I_{\Delta_c''} + M d^2 \Rightarrow I_{\Delta'''} = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\Delta'''} = \frac{3}{2} M R^2}$$



تطبيق ⑥:

أوجد عزم عطالة اسطوانة قائمة مفرغة، نصف قطرها R، وطولها ℓ، إذا علمت أنها متجانسة، وأن مادتها موزعة على سطحها S بكثافة سطحية σ منتظمة في الحالات التالية:

①. عندما تدور حول محورها Δc (العمودي على مستوى دائرة المقطع والمار بمركز ثقلها)

②. عندما تدور حول محور Δ' يوازي Δc ويمس سطحها الجانبي.

③. عندما تدور حول محور Δ_c'' عمودي على Δc ومار بمركز ثقلها C.

④. عندما تدور حول محور Δ''' يوازي Δ_c'' ويتقاطع مع Δc عند أحد طرفيها.

الجواب:

①. نأخذ شريحة من السطح طولها ℓ وعرضها $Rd\theta$ فتكون مساحتها: $S = \ell R d\theta$ وكتلتها: $dm = \sigma \ell R d\theta$

$$I_{\Delta c} = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sigma \ell R d\theta = R^3 \sigma \ell \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \sigma \ell R^3 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta c} = MR^2 ; M = 2\pi \sigma \ell R}$$

②.

نظرية هويغنز الثانية: $I_{\Delta'} = I_{\Delta c} + M d^2 = MR^2 + MR^2 \Rightarrow \boxed{I_{\Delta'} = 2MR^2}$

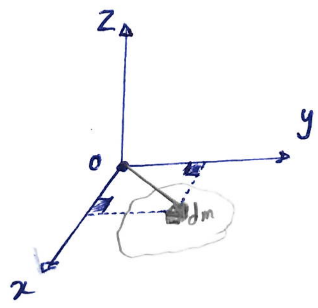
③. نأخذ شريحة على شكل حلقة دائرية عرضها dx وطولها $2\pi R$ وتبعد عن مركز الثقل c مسافة x فتكون كتلتها: $dm = \sigma 2\pi R dx$

فيكون عزم عطالتها حول Δc: $d I_{\Delta c} = R^2 dm$

عزم العطالة (الشريحة) حول Δc العمودي على مستوى الحلقة يساوي مجموع عزمي العطالة حول محورين متعامدين واقعين في مستويها [المحور Δ_0 والمحور الواقع في نفس R]، ونكتب:

$$d I_{\Delta c} = 2 d I_R = 2 d I_{\Delta_0} \Rightarrow d I_{\Delta_0} = \frac{d I_{\Delta c}}{2} \Rightarrow \boxed{d I_{\Delta_0} = \frac{1}{2} R^3 \sigma 2\pi dx}$$

ملاحظة :



ليكن لدينا صفيحة رقيقة (مهملة السماكة) ومتجانسة (متماثلة) فإنّ:

" مجموع عزمي عطالتها حول محورين متعامدين يقعان في مستويها ، يساوي

إمّا:
① . عزم عطالتها حول (O) نقطة التقاء هذين المحورين
② . عزم عطالتها حول (OZ)

ورياضياً نكتب [علماً أنّ $Z=0$] :

$$\boxed{I_O = I_Z = \int (x^2+y^2)\,dm}$$

(Ox): $I_x = \int y^2\,dm$ المحور الأول الواقع في مستويها

(Oy): $I_y = \int x^2\,dm$ المحور الثاني الواقع في مستويها

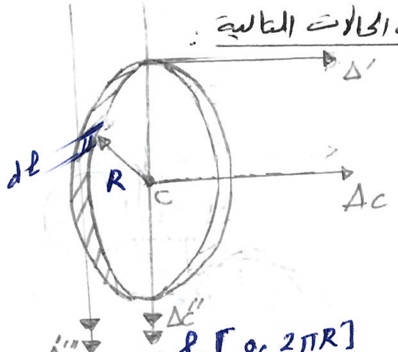
نتيجة :

إذا كان OZ محور تناظر دوراني عندئذٍ : $I_x = I_y \Rightarrow \boxed{I_Z = 2I_x = 2I_y}$

تطبيق 5 :

أوجد عزم عطالة حلقة دائرية الشكل [الحلقة الدائرية مصنوعة من سلك متجانس مهملة بالنسبة لـ نصف قطرها R]،
إذا علمت أنّ السلك متجانس وكتلته موزعة على طوله بكثافة خطية طولية في الحالات التالية :

① . عندما يدور حول محور Δc (العمودي على مستويه والمار بمركز ثقله C)
② . عندما يدور حول محور Δ' عمودي على مستويه ومار بنقطة من محيطه
③ . عندما يدور حول محور $\Delta c''$ واقع في مستويه ومار بمركز ثقله C
④ . عندما يدور حول محور Δ''' واقع في مستويه ومار بنقطة من محيطه



حيث نأخذ $l\ [0, 2\pi R]$

الجواب :

① . نأخذ عنصر الطول dl من الحلقة ذو الكتلة $dm = \lambda\,dl$

نصف قطر الحلقة : R ، $l = 2\pi R$: طول الحلقة الكلي

فنكتب : $I_{\Delta c} = \int r^2\,dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda\,dl$

$$\Rightarrow I_{\Delta c} = R^2\lambda \int_0^{2\pi R} dl = 2\pi\lambda R^3$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\Delta c} = 2\pi\lambda R^3 = MR^2 \;;\; M = \lambda l}$$

② . $I_{\Delta'} = I_{\Delta c} + M d^2 \Rightarrow I_{\Delta'} = MR^2 + MR^2$: نطبق نظرية هويغنز الثانية

$$\Rightarrow \boxed{I_{\Delta'} = 2MR^2}$$

تطبيق 6 :

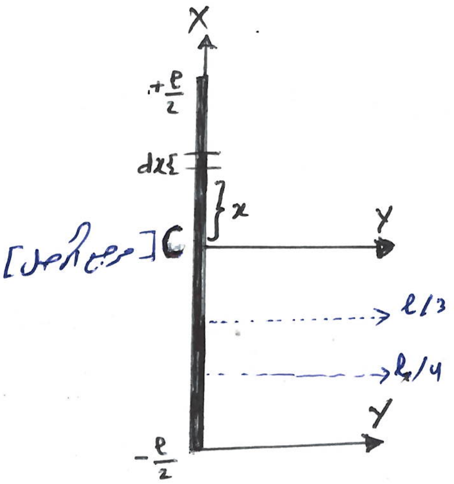
أوجد عزم عطالة قضيب رفيع [نصف قطره مهمل بالمقارنة مع طوله] ومتجانس ، إذا علمت أن مادته موزعة على طوله ℓ بكثافة خطية منتظمة λ في الحالات التالية :

① . عندما يدور حول محور عمودي عليه ومار بمركز ثقله .
ثم من أجل نقطة تبعد عن طرفه السفلي مسافات $\ell/4$ و $\ell/3$.

② . عندما يدور حول محور عمودي عليه ومار من أحد طرفيه .

③ . عندما يدور حول محور منطبق على محوره .

الجواب :



① . نأخذ الاعتبارات التالية :

- القضيب منطبق على المحور ox الموجه نحو الأعلى
- نأخذ المحور $\Delta = Cy$ كمحور عمودي على القضيب ومار من مركز كتلته [منتصف القضيب] .

☒ لدينا عبارة عزم العطالة حول محور Δ بالشكل :

$$I_\Delta = \int r^2 dm \quad ;$$

من أجل عنصر الطول dx ذو الكتلة $dm = \lambda dx$ والذي يبعد مسافة x عن محور الدوران $\Delta = Cy$ نكتب :

$$I_\Delta = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{\ell^3}{8}+\frac{\ell^3}{8}\right] = \frac{1}{12}\lambda \ell^3 \Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{1}{12}M\ell^2 \ ; M=\lambda\ell}$$

من أجل نقطة تبعد عن طرفه السفلي مسافة $\ell/3$:

$$I_\Delta = \int_{-\frac{\ell}{3}}^{+\frac{2\ell}{3}} x^2 \lambda dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/3}^{+\frac{2\ell}{3}} = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{8\ell^3}{27}+\frac{\ell^3}{27}\right] = \frac{1}{9}\lambda\ell^3 = \frac{1}{9}M\ell^2$$

ومن أجل نقطة تبعد عن طرفه السفلي مسافة $\ell/4$:

$$I_\Delta = \int_{-\frac{\ell}{4}}^{+\frac{3\ell}{4}} x^2 \lambda dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/4}^{+\frac{3\ell}{4}} = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{27\ell^3}{64}+\frac{\ell^3}{64}\right] = \frac{7}{48}\lambda\ell^3 \simeq \frac{1}{7}M\ell^2$$

② نعتبر المحور $\Delta' = y'$ المار من طرفه السفلي ، ونكتب :

$$I_{\Delta'} = \int_0^\ell x^2 \lambda dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\ell = \frac{\lambda}{3}\left[\ell^3\right] = \frac{1}{3}\lambda\ell^3 = \frac{1}{3}M\ell^2$$

③ . عندما يدور حول منطبق على ox فإن العزم يكون معدوم وذلك لأن نصف قطر القضيب مهمل [الكتلة الموزعة على طوله ولم يؤخذ توزع الكتلة على نصف القطر بعين الاعتبار لأن نصف قطره مهمل بالمقارنة مع طوله] .

نظريات هويغنز

النظرية الأولى ①:

$$\boxed{I_O = I_C + Md^2}$$

تنص على أنّ: عزم عطالة جسم صلب حول النقطة O أيًا ما يساوي عزم عطالته حول المركز C مضافاً إليه Md^2، حيث: M كتلة الجسم و d البعد بين النقطتين O و C.

النظرية الثانية ②:

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta c} + Md^2}$$

تنص على أنّ: عزم عطالة جسم صلب حول محور ما Δ يساوي إلى عزم عطالته حول محور Δc يوازي Δ ويمر بمركز كتلته مضافاً إليه المقدار Md^2، d: البعد بين المحورين هنا.

النظرية الثالثة ③:

$$\boxed{I_{xy} = I_{XY} + M x_c \cdot y_c}$$

هنا نأخذ معلمين: الأولى ①: (O, x, y, z) ثابت والثانية ②: (C, X, Y, Z) محاورها موازية للأولى ومركزها متحركة مع الكتلة M حول O2

وتنص على أنّ: جداء العطالة المتعلقة بالجملة الثابتة I_{xy} يساوي إلى جداء العطالة المتعلق بالجملة المتحركة I_{XY} مضافاً إليه المقدار $M x_c y_c$، حيث x_c و y_c إحداثيي مركز الكتلة والمأخوذين في الجملة الثابتة.

كما نرى من الشكل أنّ :

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h} \Rightarrow dx = \frac{1}{\tan\alpha/2}\,dy$$

ومنه : $$V = \frac{\pi}{\tan\alpha}\int_0^r y^2\,dy = \frac{\pi h}{r}\left[\frac{r^3}{3}\right] = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- وبالتعويض عن حجم المخروط ثُلث عن قيمته في العلاقة (*) نجد :

$$x_C = \frac{1}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}\iiint_V x\,\pi y^2\,dx$$

- ومن تشابه المثلثات نجد أنّ :

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h} \Rightarrow y = \frac{r}{h}x$$

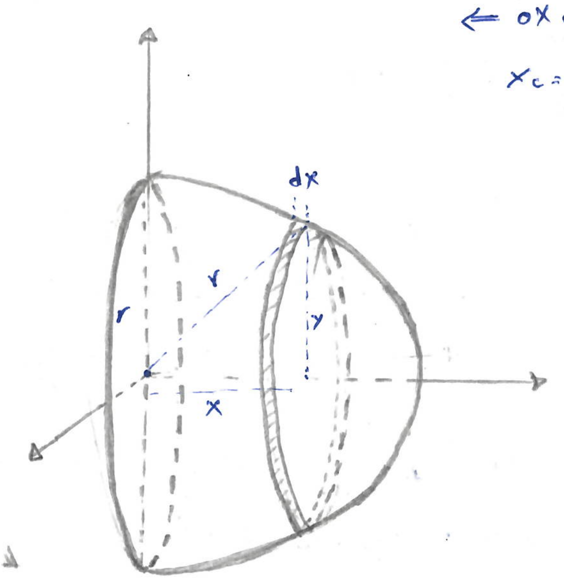
[r و h ثوابت ويتحول التكامل إلى تكامل على x بذلك] :

$$x_C = \frac{3\pi}{\pi r^2 h}\cdot\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^3\,dx = \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^4}{4}\right] = \frac{3}{4}h$$

- إذن مركز المطالة C يقع على محور التناظر OX ، ويبعد عن المبدأ مسافة تساوي إلى (3/4) من الارتفاع h .

تطبيق 3 : أوجد مركز ثقل مجسم نصف كرة مصمتة نصف قطرها r ، إذا علمت أنّ مادة كتلتها متجانسة وموزعة داخلها بشكل مستمر وبكثافة حجمية منتظمة .

الجواب :



- نأخذ محور تناظر الكرة المصمتة على أنّه OX ⇐ مركز ثقلها يقع على OX ⇐
ولذلك نكتفي بإيجاد x_C لأنّ ρ ثابتة ، ونكتب : (*) $x_C = \frac{1}{V}\iiint_V x\,dV$

- من الشكل نكتب :

$$dV = \pi y^2\,dx$$ ونكتب : $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

وحجم نصف الكرة : $V = \frac{2}{3}\pi r^3$

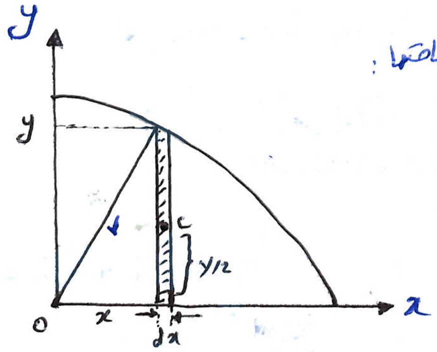
- وبالتعويض عن كل قيمته في العلاقة (*) نجد :

$$x_C = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi r^3}\int \pi(r^2 - x^2)\,x\,dx$$

$$= \frac{3}{2r^3}\left[r^2\int_0^r x\,dx - \int_0^r x^3\,dx\right] = \frac{3}{2r^3}\left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right] = \frac{3}{8}r$$

- إذن يقع مركز الكتل C على محور التناظر OX ويبعد عن المبدأ مسافة تساوي 3/8 من نصف القطر r.

تطبيق ①: أوجد مركز ثقل صفيحة على شكل ربع دائرة نصف قطرها r ، إذا علمت أنها مهملة السماكة ، وإن مادة كتلتها متجانسة وموزعة على سطحها المستوي بشكل مستمر وبكثافة سطحية σ منتظمة.



الحل: نأخذ على الشكل الموضح جانباً شريحة عرضها dx وطولها y فتكون مساحتها:

$$ds = y\,dx \quad \ldots\ldots(1)$$

- وتكون إحداثيات مركز الشريحة المستطيلة هي: $C(x, \frac{y}{2})$

- لدينا: $dm = \sigma ds$ & $M = \sigma S$

$$\Rightarrow x_c = \frac{1}{\sigma S}\int x\,\sigma\,ds \quad \& \quad y_c = \frac{1}{\sigma S}\int \frac{y}{2}\,\sigma\,ds$$

- وبالتعويض عن (*) بقيمتها نجد أن:

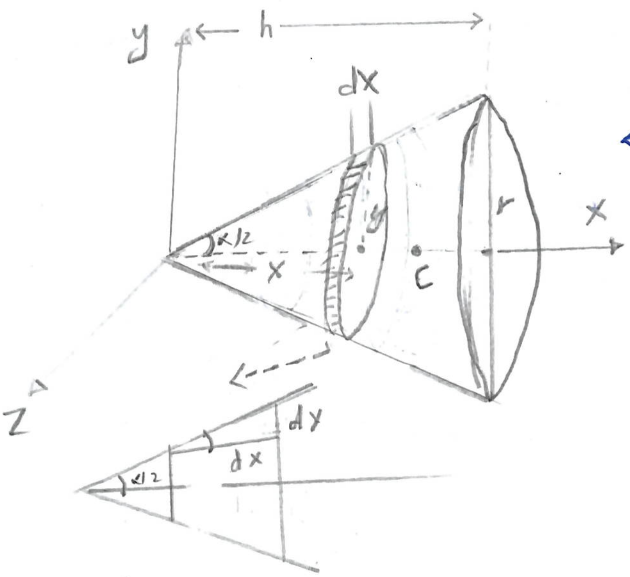
$$x_c = \frac{1}{\sigma S'}\int x\sigma \qquad \& \qquad y_c = \frac{1}{\sigma S}\int \frac{y}{2} \quad \ldots(2)$$

- وبملاحظة الشكل: يمكننا استخدام العلاقة $r^2 = x^2 + y^2$ لتحويل العلاقات في (2) إلى متحول واحد ، مع العلم أن مساحة ربع الدائرة هو: $S' = \frac{\pi r^2}{4}$

$$* \; x_c = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r y\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{4}{\pi r^2}\int_r^0 y \,.\, d\left(\frac{r^2 - y^2}{2}\right) = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r y^2 dy = \frac{4}{\pi r^2}\left[\frac{r^3}{3}\right] = \frac{4}{3\pi} r$$

$$* \; y_c = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r \frac{y^2}{2}\,dx = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r \frac{r^2 - x^2}{2}\,dx = \frac{4}{\pi r^2}\left[\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{6}\right] = \frac{4}{3\pi} r$$

تطبيق ②: أوجد مركز ثقل مجسم مخروطي دوراني مصمت وقائم ، إذا علمت أن مادة كتلته متجانسة وموزعة ضمنه بشكل مستمر وبكثافة حجمية منتظمة وأن ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r.



الجواب:

- نأخذ محور تناظر المخروط OX ⇐ مركز ثقله سيقع على هذا المحور ⇐

لذلك نكتفي بإيجاد X_c ، ونكتب:
لأنه ثابته

$$X_c = \frac{1}{V}\iiint_V x\,dv \quad (*)$$

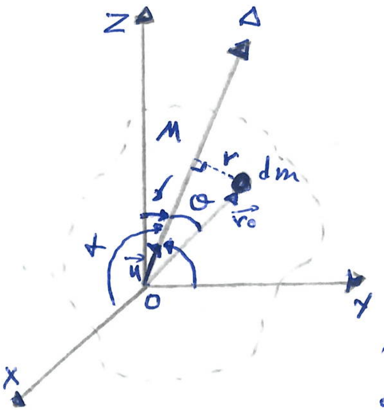
- من الشكل:

$$dv = \pi y^2 dx$$

④ جداءات العطالة :

$$I_{xy} = \int xy\,dm \quad ; \quad I_{xz} = \int xz\,dm \quad ; \quad I_{zy} = \int zy\,dm$$

⑤ عزم عطالة جسم صلب حول محور زوايا توجيهه معلومة :



- يكتب متجه الوحدة $\vec{u}$ المحمول على Δ والذي يصنع الزوايا (α, β, γ) مع المحاور الإحداثية بالشكل:

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

- كما لدينا :

$$\vec{r_0} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وعليه استنادا للشكل : $|\vec{r_0} \times \vec{u}| = |\vec{r_0}||\vec{u}|\sin\theta = r_0 \sin\theta = r$

- لدينا عبارة عزم عطالة :

$$I_\Delta = \int r^2\,dm = \int (\vec{r_0} \times \vec{u})^2\,dm$$

لدينا : $\vec{r_0} \times \vec{u} = (y\cos\gamma - z\cos\beta)\vec{i} + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)\vec{j} + (x\cos\beta - y\cos\alpha)\vec{k}$; $\vec{r_0} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow (\vec{r_0} \times \vec{u})^2 = (y\cos - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2$$

$$\Rightarrow I_\Delta = \int [(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2]\,dm$$

$$= \int [(y^2\cos^2\gamma + z^2\cos^2\beta - 2zy\cos\beta\cos\gamma) + (z^2\cos^2\alpha + x^2\cos^2\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma) + (x^2\cos^2\beta + y^2\cos^2\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta)]\,dm$$

$$= \int [(y^2+z^2)\cos^2\alpha + (x^2+z^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma]\,dm$$

$$= \cos^2\alpha\int(y^2+z^2)\,dm + \cos^2\beta\int(x^2+z^2) + \cos^2\gamma\int(x^2+y^2)\,dm - 2\cos\alpha\cos\beta\int xy\,dm - 2\cos\alpha\cos\gamma\int xz\,dm$$
$$- 2\cos\beta\cos\gamma\int yz\,dm$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\Delta = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma}$$

إذن :

يُعطى عزم عطالة جسم صلب حول محور Δ زوايا توجيهه معلومة بدلالة عزوم عطالته حول محاوره وجداءات العطالة وزوايا التوجيه .

عزوم العطالة

① . من أجل نقطة مادية :

$$\boxed{I = m r^2}$$

حيث r بعد النقطة المادية ذات الكتلة m عن مركز الدوران [وليكن نقطة مبدأ الإحداثيات O] أو عن محور Δ أو عن مستوى Π.

② . ومن أجل مجموعة نقاط مادية بحالة توزع منفصل :

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2 \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots,N} \quad (*)$$

النقاط $(i = 1,\ldots,N)$ تتوزع توزعاً منفصلاً وتبعد كل نقطة بعداً مساوياً r_i عن مركز الدوران O أو Δ أو Π

③ . ومن أجل مجموعة نقاط مادية بحالة توزع مستمر (عزم العطالة لجسم صلب) :

تصبح العلاقة (*) بحالة التوزع المستمر بالشكل :

$$I = \int r^2 \, dm \quad (*)' \quad ; \quad r : \text{بعد مركز عنصر الكتلة } dm \text{ عن } O \text{ أو } \Delta \text{ أو } \Pi$$

حيث dm عنصر الكتلة من هذا الوسط المستمر الواقع في النقطة $M(x,y,z)$ المحدد بشعاع الموضع $\vec{r}$

- بناءً على العلاقة (*)' يمكن أن نكتب التالي :

① . عزوم عطالة الجسم الصلب حول المحاور المتعامدة (x,y,z) :

$$I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \quad ; \quad I_y = \int (x^2+z^2)\,dm \quad ; \quad I_z = \int (x^2+y^2)\,dm$$

② . عزم عطالة الجسم الصلب حول المستويات المتعامدة :

$$I_{xoy} = \int z^2\,dm \quad ; \quad I_{yoz} = \int x^2\,dm \quad ; \quad I_{xoz} = \int y^2\,dm$$

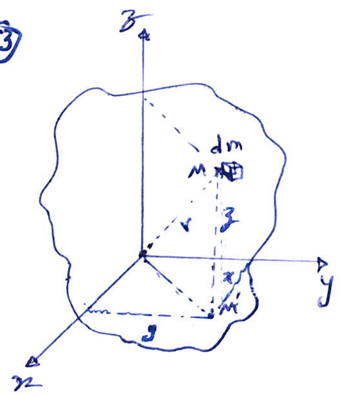
③ . عزم عطالة الجسم الصلب حول مركز المحاور المتعامدة :

$$I_o = \int (x^2+y^2+z^2)\,dm$$

- نتائج :

$$\left.\begin{aligned} I_{xoy} + I_{xoz} &= I_x \\ I_{xoy} + I_{yoz} &= I_y \\ I_{xoz} + I_{yoz} &= I_z \end{aligned}\right\} (1) \quad ; \quad I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \; (2)$$

$$; \quad I_o = I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} \quad (3)$$



من ② و③ نجد : $I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \quad (4)$

- فإذا انتقلت نقطة مادية في حقل الثقالة الأرضية، على سبيل المثال، من مكان M_1 إلى آخر M_2، فإن العمل الذي تقوم به قوة الثقالة والذي سنرمز له بالرمز $A_{M_1}^{M_2}$ هو الفرق بين قيمتي تابع الكمون V في النقطتين M_1 و M_2؛ أي أن:

$$A_{M_2}^{M_1} = V(M_1) - V(M_2) \quad \text{------} (32)$$

وقد يكون هذا العمل موجباً أو سالباً تبعاً لتناقص تابع الكمون V أو تزايده.

- وإذا كانت النقطتين M_1 و M_2 قريبتين جداً من بعضهما فإننا نجد، طبقاً لتعريف العمل العنصري للقوة F المؤثرة على النقطة M، ما يلي:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dT = -dV \quad \text{-----} (33)$$

ومنه نجد قانون مصونية الطاقة (تكامل الطاقة):

$$d(T+V) = 0 \implies T+V = E = const \quad \text{------} (34)$$

وتلعب هذه العلاقة دوراً هاماً في الميكانيك لأن غالبية القوى التي سنستخدمها كمونية وبالتالي يتحقق بالنسبة لها قانون مصونية الطاقة.

- ويمكن تعميم ذلك إلى مجموعة مادية مؤلفة من N نقطة مادية، والآن نفرض أن المجموعة انتقلت انتقالاً عنصرياً تحت تأثير القوة $\vec{F}$ من النقطة M إلى النقطة M'، عندئذٍ نكتب:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \quad = -dV \quad \text{----} (35)$$

بينما تكامل الطاقة:

$$E = T+V = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + V(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_N, y_N, z_N) \quad \text{------} (36)$$

5) . نظرية الطاقة الحركية لمجموعة مادية :

- نعرّف الطاقة الحركية لمجموعة نقط مادية سرعتها $\vec{v}_i$ ، بالعلاقة :

في حالة التوزع المستمر : $T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i)$ ---- (26)

وفي حالة التوزع المتصل : $T=\frac{1}{2}\int v^2\,dm=\frac{1}{2}\int \vec{v}\cdot\vec{v}\,dm$ ---- (27)

- لنبرهن ما يسمى بـ "نظرية كونيغ" وهي أنه يمكن تقسيم الطاقة السابقة إلى طاقتين" :
الأولى : طاقة مركز الكتلة والثانية : الطاقة حول مركز الكتلة . ولذلك نعوض عن $\vec{v}_i$ بقيمتها من العلاقة (*) ، فنجد :

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{v}(c)+\vec{v}_i')^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left[v^2(c)+2\,\vec{v}(c)\cdot\vec{v}_i'+v_i'^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\,v^2(c)+\vec{v}(c)\cdot\sum_i m_i\vec{v}_i'+\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2=T(c)+T' \quad \text{---- (28)}$$

حيث :

- $T=\frac{1}{2}m\,v^2(c)$ ..... (29) هي طاقة مركز الكتلة ، فالنقطة C ذات الكتلة m تتحرك بسرعة $\vec{v}(c)$ وبطاقة حركية معرّفة بالعلاقة (29)

- $T'=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$ ، هي الطاقة الحركية للمجموعة حول مركز الكتلة لأن $\vec{v}_i'$ بالتعريف هي السرعة للنقطة M_i بالنسبة لمركز الكتلة .

- والآن ، تفاضل الطاقة الحركية ، فنبدأ انطلاقاً من تعريفها (26) أنه :

$$dT=\sum_i m_i\,\vec{v}_i\,d\vec{v}_i=\sum_i m_i\,\vec{v}_i\cdot\frac{d\vec{v}_i}{dt}dt=\sum_i m_i\,\vec{a}_i\,d\vec{r}_i \quad ; \quad d\vec{r}_i=\vec{v}_i\,dt$$

$$\Rightarrow dT=\sum_i \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i \quad \text{---- (30)}$$

أي أن : تفاضل الطاقة الحركية يساوي العمل العنصري الناتج عن القوة $\sum \vec{F}_i$.

وبإجراء تكامل لطرفي (30) بين وضعين نجد :

$$T_2-T_1=\sum_{i=1}^{N}\int \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i \quad \text{---- (31)}$$

6) . تابع الكمون - تكامل الطاقة :

- نذكر بتعريف القوى الكمونية :

هي القوى التي لا يتوقف عملها على الطريق المسلوك بين نقطتين A و B من المسار وإنما يتعلق فقط بالوضع الابتدائي والنهائي ، أي بموضع النقطتين A و B .

- وعندئذ يمكن تعريف تابع نقطي هو تابع الكمون بحيث يحسب العمل من خلاله ، حيث تؤخذ قيمته البدائية والنهائية

ومنه نجد أن:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \frac{d\vec{OC}}{dt} + \frac{d\vec{CM}_i}{dt} = \vec{v}(C) + \vec{v}_i' \quad \text{.....}(*)$$

حيث: $\vec{r}_i'$ متجه موضع النقطة M_i انطلاقاً من النقطة C ، و $\vec{v}_i'$ هي سرعة النقطة M_i حول C.

- وطبقاً لتعريف العزم الحركي:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i [\vec{OC} \times \vec{r}_i'] \times [\vec{v}(C) + \vec{v}_i']$$

$$= \sum_i m_i \vec{OC} \times \vec{v}(C) + \sum_i m_i \vec{OC} \times \vec{v}_i' + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_C + \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'$$

$$= \vec{OC} \times m\vec{v}(C) + \vec{OC} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}_i'\right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_C + \vec{L}' \quad \text{......}(19)$$

- ولكن المجموع الشعاعي $\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$ (معدوم) [وذلك لأننا وضعنا المبدأ الذي نحسب منه هذه المحصلة الشعاعية في مركز الكتلة ، وبالتالي طبقاً لتعريف مركز الكتلة (1) تكون هذه المحصلة معدومة]

- ومنه فإن المجموع $\sum_i m_i \vec{v}_i'$ يكون معدوم لأنه مشتق $\sum_i m_i \vec{r}_i'$ ، وبالتالي نجد العلاقة:

$$\vec{L} = \vec{L}(C) + \vec{L}' \quad \text{......}(20)$$

حيث: $\vec{L}(C) = \vec{OC} \times \vec{P}(C)$ ..(21) هو العزم الحركي لمركز الكتلة باعتباره نقطة مادية واحدة كتلتها هي الكتلة الكلية للمجموعة ويسير بسرعة $\vec{v}(C)$ ، أما $\vec{L}'$ فمعبر عنه بالعلاقة:

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' \quad \text{......}(22)$$

وهو العزم الحركي للمجموعة المادية حول مركز كتلتها.

- إذن فإن العزم الحركي لمجموعة مادية هو عبارة عن عزمين:
<u>الأول</u>: عزم مركز الكتلة <u>والثاني</u> عزم المجموعة حول مركز الكتلة.

- من العلاقة (18) ، نكتب:

$$\vec{M}^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \Rightarrow \vec{M}^{ext} = \sum_i (\vec{OC} + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_i \vec{OC} \times \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \vec{M}^{ext} = \vec{OC} \times \vec{F} + \vec{M}_i^{ext\,\prime} \quad \text{......}(23)$$

- والآن ، بالمقارنة نشتق طرفي العلاقة (20):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{OC}}{dt} \times m\vec{v}(C) + \vec{OC} \times m\frac{d\vec{v}(C)}{dt} + \frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{OC} \times \vec{F} + \frac{d\vec{L}'}{dt} = M^{ext} \quad \text{......}(24)$$

إذن: $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}^{ext\,\prime}$ ......(25)

<u>أي أن</u>: مشتق العزم الحركي للمجموعة حول مركز الكتلة يساوي محصلة عزوم القوى الخارجية المؤثرة عليها بالنسبة لـ C.

- خلال الفترة الزمنية (t_2-t_1) ، نكامل طرفي العلاقة السابقة ، فنجد :

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{ext}\,dt \quad \text{(14)} \xrightarrow{\text{تحليليا}} P_{2x}-P_{1x}=\int_{t_1}^{t_2}F_x^{ext}dt\ ;\ P_{2y}-P_{1y}=\int_{t_1}^{t_2}F_y^{ext}dt\ ;\ P_{2z}-P_{1z}=\int_{t_1}^{t_2}F_z^{ext}dt \quad \text{(15)}$$

- وفي الحالة الخاصة : $\vec{F}^{ext}=\vec{0}$ ، وبالعودة لعلاقة تغير الاندفاع (13) نرى أنه :

$d\vec{P}=\vec{0} \Rightarrow \vec{P}=\vec{P}_0$ (أي أن اندفاع المجموعة يبقى كما هو كان عند البداية) محفوظ

وهنا نميز حالتين : (1) سكون و (2) حركة مستقيمة منتظمة

بالعودة للعلاقة (10) وبأخذ ذلك بعين الاعتبار نكتب :

$$\vec{P}=\vec{P}_c=m\vec{v}_c=\overrightarrow{const} \Rightarrow \vec{v}_0(c)=\vec{v}_0(c)$$

مركز الكتلة

سكون (1) : $\vec{v}_0(c)=0 \Rightarrow \vec{v}(c)=\vec{0} \Rightarrow \vec{r}(c)=\vec{r}_0(c)$ [يبقى في الوضع الابتدائي $\vec{r}_0(c)$]

حركة مستقيمة منتظمة : $\vec{v}(c)=\vec{v}_0(c) \Rightarrow \vec{r}(c)=\vec{v}_0(c)[t-t_0]+\vec{r}_0(c)$ [يتحرك مركز الكتلة حركة منتظمة]

3". نظرية العزم الحركي لمجموعة مادية :

- يعرف العزم الحركي لمجموعة مادية مؤلفة من N نقطة مادية بالعلاقة ونرمز له $\vec{L}$:

في حالة التوزع المنفصل لنقاط المجموعة : $\vec{L}=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{P}_i$ ...... (16)

في حالة التوزع المستمر : $\vec{L}=\int_{(m)}\vec{r}\times\vec{v}\,dm$ و $dm=\rho dV$ ...... (17)

وهكذا تحول التكامل إلى تكامل حجمي على كامل الحجم V الذي تشغله الكتلة m .

- وبمفاضلة طرفي العلاقة (16) نرى أنه :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times m_i\vec{v}_i+\sum_i\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

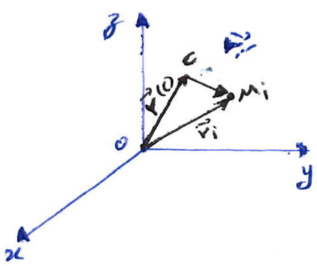
$$=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{ext}+\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{int}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{ext}=\underset{\text{لمجموعة مادية}}{\vec{M}^{ext}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{ext}=\vec{M}^{ext} \quad \text{(18)}$$

أي أن : مشتقة العزم الحركي الزمنية ما هي إلا عزم محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها .

- وفي الحالة الخاصة $\vec{M}^{ext}=\vec{0}$ ، يكون :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=\vec{L}_0 \ (\text{ محفوظ })$$

4". قانون تغير العزم الحركي حول مركز الكتلة :



- من الشكل نجد أن النقطة M_i تتعين بمتجه الموضع $\vec{r}_i=\overrightarrow{OM_i}$ المعين بالعلاقة الشعاعية :

$$\vec{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM_i}=\overrightarrow{OC}+\vec{\rho}_i \quad ; \quad C: \text{ مركز كتلة المجموعة}$$

مركز تناظر فإن مركز الكتلة ينطبق على هذا المركز، وإذا كان للجسم مستوي تناظر فإن مركز الكتلة يقع ضمن هذا المستوي، وأخيراً إذا كان للجسم محور تناظر فإن مركز الكتلة يقع على هذا المحور.

2°. معادلة الحركة، القوى الداخلية والخارجية:

إن معادلة الحركة للنقطة M_i من المجموعة المادية والتي تؤثر فيها قوى محصلتها $\vec{F}_i$، فتكسبها تسارعاً $\vec{a}_i$ هي:

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} \quad \text{------} (6)$$

حيث $\vec{F}_i^{ext}$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على M_i [وهي ناتجة عن وجود النقطة M_i في حقل قوى خارجي، كالحقل الثقالي والكهربائي]

$\vec{F}_i^{int}$ محصلة القوى الداخلية المؤثرة على M_i [وهي محصلة القوى التي تؤثر بها باقي نقاط المجموعة المادية على النقطة M_i]

ويمكن وضعها بالشكل:

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \quad \text{------} (7)$$

حيث $\vec{F}_{ji}$ هي القوة المؤثرة على النقطة M_i من قبل النقطة M_j.

3°. نظرية كمية حركة مجموعة مادية - المعادلة الأساسية لحركة مركز الكتلة:

- نعرف كمية حركة مجموعة نقاط مادية، عددها N، واندفاع كل منها $\vec{p}_i$، بالعلاقة:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{------} (8)$$

- لنبرهن أن كمية الحركة للمجموعة هذه هي كمية حركة مركز كتلتها:

$$\sum_i m_i r_i = m\vec{r}_c \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i = m\frac{d\vec{r}_c}{dt} = m\vec{v}_c \quad \text{------} (9)$$

وبالتعويض في (8)، نجد:

$$\vec{P} = m\vec{v}_c = \vec{P}_c \quad \text{------} (10)$$

- والآن، لنقوم باشتقاق العلاقة (8) بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i a_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} \quad \text{------} (11)$$

- ويمكن طبقاً للفعل ورد الفعل تكون محصلة القوى الداخلية معدومة، وعندئذٍ نكتب:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = m\vec{a}_c = \vec{F}^{ext} \quad ; \quad \sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext} \quad \text{------} (12)$$

أي أن: مركز كتلة مجموعة مادية (وهو النقطة c) يتحرك كنقطة مادية وحيدة كتلتها هي الكتلة الكلية للمجموعة وتؤثر فيها قوة $\vec{F}^{ext}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على هذه المجموعة.

- نلاحظ من (12) أن:

$$d\vec{P} = \vec{F}^{ext} dt \quad \text{------} (13)$$

أي أن: تغير الاندفاع لمجموعة مادية سيساوي إلى دفع محصلة القوى الخارجية المؤثرة في هذه المجموعة.

الفصل - ⑤ : النظريات العامة في تحرك (المجموعات) النقطة المادية - عزوم العطالة

① مركز كتلة مجموعة مادية :

- نذكر أولاً بتعريف المجموعة المادية بأنها: مجموعة من النقط المادية ترتبط حركة كل منها بالنقط الباقية كالمجموعة الشمسية، أو مجموعة الإلكترونات التي تدور حول نواة عنصر ما، أو مجموعة أجسام مرتبطة ميكانيكياً بطريقة ما، أو مجموعة نقطتين ماديتين مثبتتين بطرفي قضيب معدني، .... إلخ.

أ) مركز كتلة (عطالة) مجموعة مادية :

- لتكن لدينا مجموعة مادية مؤلفة من N نقطة، ولنفرض أن النقطة M_i ذات الكتلة m_i معينة بـ متجه الموضع $\vec{OM_i} = \vec{r_i}$ (حيث: $i = 1, 2, \dots, N$).

- نعرف مركز كتلة (عطالة) مجموعة النقط هذه بأنه النقطة C التي تحقق العلاقة :

$$\vec{OC} = \vec{r_c} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} + \dots + m_N\vec{r_N}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N} = \frac{\sum_i m_i\vec{r_i}}{\sum_i m_i} \quad \text{.......} ①$$

- ومن أجل حالة الإحداثيات الديكارتية، يكون:

$$\vec{r} = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k} \Longrightarrow x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m} \; ; \; y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m} \; ; \; z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m} \quad ; m = \sum m_i \quad \text{.......} ②$$

- أما عندما تؤلف المجموعة وسطاً "مستمراً"، نكتب :

$$\vec{r_c} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\, dm \quad \text{.......} ③ \xRightarrow{\text{تحليلياً}} x_c = \frac{1}{m}\int x\, dm \; ; \; y_c = \frac{1}{m}\int y\, dm \; ; \; z_c = \frac{1}{m}\int z\, dm \quad \text{.......} ④$$

ب) مركز ثقل مجموعة مادية :

- يعرف مركز ثقل مجموعة مادية بأنه النقطة G التي تحقق العلاقة :

$$\vec{r_G} = \frac{\sum m_i g_i \vec{r_i}}{\sum m_i g_i} \; ; \; g_i : \text{شدة تسارع الثقالة في النقطة } M_i \quad \text{.......} ⑤$$

نفرض : $g = g_i \Longrightarrow$ ينطبق مركز الكتلة على مركز الثقل

ملاحظة ① :

* إن التكاملات السابقة هي تكاملات ثلاثية عندما يكون حجماً، وثنائية عندما يكون الجسم سطحاً (صفيحة مثلاً)، وأحادية عندما يكون الجسم خطياً (سلك مستقيم أو دائري مثلاً)، ويجب دوماً في حل المسائل أن يؤخذ عنصر الجسم (أو السطح أو الطول). نفرض الجسم ثلاثي الأبعاد :

عندئذٍ : $dm = \rho(x, y, z)\, dV$

حيث: ρ: الكتلة الحجمية، dV: عنصر الحجوم.

وهكذا تتحول مسألة إيجاد مركز الكتلة إلى مسألة إيجاد مركزه الهندسي $\Longleftarrow$ (عندما يكون توزع الكتلة متجانساً على واحدة الحجوم) عندما $\rho = ct$ *

* ومن المفيد جداً استخدام الخواص التناظرية للأجسام المتجانسة في إيجاد مراكز كتلتها، فإذا كان للجسم المدروس