كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : ٤+٥ /نظري/كتابة

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

## الفصل الرابع - ④ : مبدأ المبير - حركة نقطة مقيدة

### "① . تمهيد :

- لقد كنا نعتبر في دراستنا السابقة أنّ "التوازن هو حالة خاصة من حالات الحركة تحدث عندما ينعدم تسارعها وبالتالي تنعدم محصلة القوى المؤثرة (ميكانيك نيوتن).

وقد استطاعت هذه الدراسة أن تعطي نتائج جيدة ، ولكن " التمثيل " النيوتني ليس التمثيل الوحيد في الميكانيك ، حيث يمكن بناء علم الميكانيك على أسس ومبادئ أخرى ( بالأحرى وفق تمثيل ومنظور آخر ) . وفيما يلي نشرح أحد هذه المبادئ وهو مبدأ دالمبير.

### "② . مبدأ دالمبير :

ⓐ . من أجل نقطة مادية طليقة و حرة :

- تعطى معادلة الحركة من أجل نقطة مادية كتلتها $m$ تتحرك بتسارع $\vec{a}$ تحت تأثير محصلة القوى $\vec{F}$ وفق الرؤية النيوتنية بالشكل :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{......} ①$$

- ولكن لو أخذنا كتابة ① بالشكل : $\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$ ......ⓐ ، إن واحدة $m\vec{a}$ هي واحدة قوة ، ومن ثم فرضنا أن : $\vec{J} = -m\vec{a}$

وعندئذٍ نكتب ⓐ بالشكل :

$$\vec{F} + \vec{J} = \vec{0} \quad \text{......} ③$$

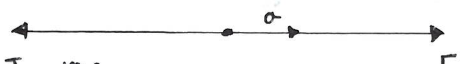
- نطلق على $\vec{J}$ اسم قوة العطالة .

- والنقطة المادية $M$ وفق المعادلة ③ تكون خاضعة لتأثير قوتين الأولى : هي القوة الفعّالة $\vec{F}$ والثانية : قوة العطالة $\vec{J}$ .

بحيث تكون محصلتها معدومة

- إذن ، « النقطة المادية الطليقة تكون متوازنة دوماً على مسارها تحت تأثير هاتين القوتين » وهي رؤية أخرى لمسألة الحركة .

- ويمكن تمثيل ذلك كما في الشكل ①



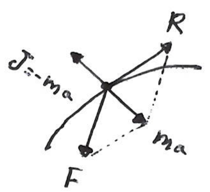

$\boxed{\text{الشكل ①}}$

- على صعيد آخر ، عندما تكون النقطة مقيدة على منحنٍ فإنها تتسارع مقارنة تحت تأثير القوة $\vec{F}$ وقوة الربط ( رد الفعل ، شد الخيط ...... ) وفق الرؤية النيوتنية بـ أي :

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \text{......} ④$$

ومن ثم تصبح العلاقة ④ وفق رؤية دالمبير ، بالشكل :

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{J} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{J} = -m\vec{a} \quad \text{......} ⑤$$




- إذن ، « النقطة المادية المقيدة تكون متوازنة دوماً على مسارها تحت تأثير هذه القوى الثلاث » .

ب. لنأخذ مثالاً تبسيطاً :

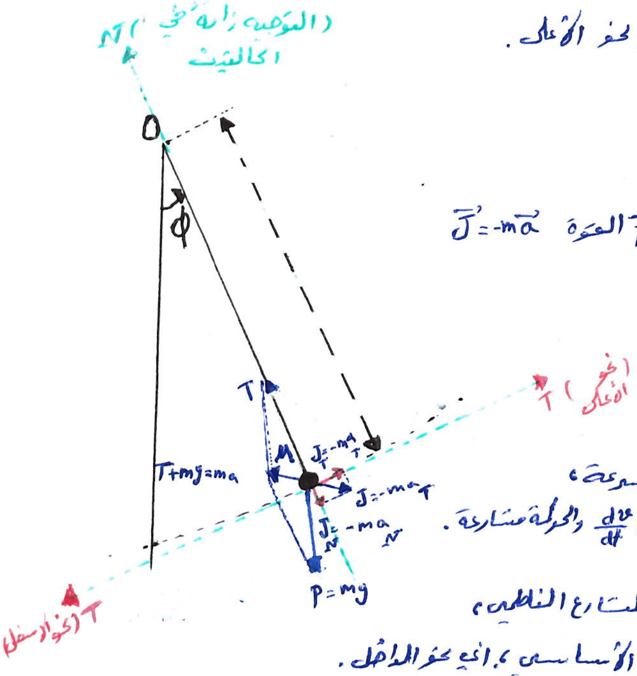
- من أجل نقطة مادية ثقيلة M مربوطة بخيط خفيف في مستوٍ شاقولي ، وطبقاً لمبدأ دالمبير هذه النقطة تكون متوازنة تحت تأثير القوة الثقالة $\vec{F}=m\vec{g}$ وقوة شد الخيط ( قوة الربط ) وقوة العطالة $\vec{J}=-m\vec{a}$ .

والمطلوب : رسم هذه القوى واتجاهاتها وذلك عندما نحو الأسفل ونحو الأعلى.

الجواب :

- إن معادلة الحركة النيوتنية هي :

$$\vec{F}+\vec{T}=m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a}$$ ، حيث يعاكس مجموع القوتين $\vec{F}$ و $\vec{T}$ القوة $\vec{J}=-m\vec{a}$




حالة ① :

- ونفرض أن الحركة تحدث باتجاه الأسفل ( باتجاه الشاقول ).

- في ثنائية ( المماس والناظم ) نرى أن $\vec{J}$ تتألف من مركبتين :

القسم الأول : $J_T=-m\frac{dv}{dt}$ وجهته بعكس اتجاه السرعة ،

لأن $dv>0$ ، أي بعكس اتجاه الشارع المماسي $\frac{dv}{dt}$ والحركة متسارعة .

القسم الثاني : $J_N=-m\,a_N$ ، وجهته بعكس اتجاه الشارع الناظمي ،

هذا الشارع الذي يتجه باتجاه الناظم الأساسي ، أي نحو الداخل .

حالة ② :

- وعند الحركة نحو الأعلى نحصل على تمثيل مشابه ، ولكن :

تكون الحركة متباطئة في هذه الحالة ، ومن ثم $\frac{dv}{dt}<0$ ، وفيه $J_T$ بعكس $\frac{dv}{dt}$ .

الخلاصة :

وهكذا تبقى النقطة المادية M متوازنة في الحالتين تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل ، ويمكن تعميم ذلك على أي حركة .

③ . لا يقتصر مبدأ دالمبير على القوى المؤثرة ، إذ يمكن تعميمه ليشمل عزوم هذه القوى .

- والآن بضرب طرفي العلاقة ② من اليسار ضرباً خارجياً بشعاع موضع النقطة M ( أي $\vec{r}$ ) فإننا نجد :

$$(\vec{r}\times\vec{F})+(\vec{r}\times\vec{J})=0 \text{ ------ } ⑥$$

الحد الأول : يمثل عزم القوة الفعالة المؤثرة في النقطة M وذلك بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O .

الحد الثاني : يمثل عزم قوة العطالة المؤثرة في النقطة نفسها .

وهذان العزمان متعاكسان مباشرة .

- أما الآن ، بينما إذا ضربنا طرفي ④ من اليسار خارجياً بـ $\vec{r}$ فإننا نجد :

$$(\vec{r}\times\vec{F})+(\vec{r}\times\vec{R})+(\vec{r}\times\vec{J})=\vec{0} \text{ ------------ } ⑦$$

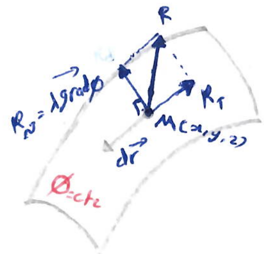
فالنقطة المادية في هذه الحالة : تخضع لثلاثة عزوم تقع في مستوٍ واحد متعامد مع $\vec{r}$ هي : عزم القوة الفعالة $\vec{F}$ وعزم قوة رد الفعل $\vec{R}$ وعزم قوة العطالة $\vec{J}$ ، التي محصلتها تساوي الصفر .

## ③' حركة نقطة مادية على سطح - منحنى فراغي :

- العقد سطح معادلته $\phi(x,y,z)=c$ :

لدينا: $\phi(x,y,z)=c \Rightarrow d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{y,z} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{x,z} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{y,z} dz = 0$ ① «معادلة الارتباط»

- ونفرض أنّ النقطة مادية $M(x,y,z)$ قامت بإنتقال عنصري على السطح بالشكل:




$$d\vec r = dx\,\vec i + dy\,\vec j + dz\,\vec k \quad ②$$

ومن ثمّ فإنّ: $\vec{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec i + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec j + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec k$ ③

تعريف التدرج

- من العلاقات ① و ② و ③ نرى أنّ:

$$d\phi = \vec{grad}\,\phi \cdot d\vec r = 0 \Rightarrow \vec{grad}\,\phi \perp d\vec r \quad ----- ④$$

- وبما أنّ $d\vec r$ عنصر انتقال كيفي من السطح (لأعلى المنحني) ⟸ شعاع التدرج $\vec{grad}\,\phi$ عمودي على السطح $\phi$

- بتحليل $\vec R$ (رد فعل السطح) إلى مركبتين: $\vec R_N$ (ناظمية على السطح) ومماسية له $\vec R_T$ لعدم نعومة السطح إنْ وجدت:

$$\vec R_N = \lambda\,\vec{grad}\,\phi \quad ; \quad \lambda : \text{مضروب لاغرانج} \quad ----- ⑤$$

- لدينا معادلة الحركة:

$$\vec f + \vec R = m\vec a \Rightarrow \underbrace{\vec f + \vec R_T}_{\vec F} + \vec R_N = m\vec a \Rightarrow \boxed{m\vec a = \vec F + \lambda\,\vec{grad}\,\phi} \quad ---- ⑥$$

- من معادلات الحركة بتحليل العلاقة الأخيرة على كل محور من جملة المحاور $(x,y,z)$ بالشكل:

$$\begin{cases} m\ddot x = X + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ m\ddot y = Y + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ m\ddot z = Z + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases} \quad ----- ⑦ \quad ; \vec F(X,Y,Z)$$

وهي أربع معادلات مع معادلة السطح (4 معادلات بـ 4 مجاهيل $x,y,z,\lambda$) وبحلها نحصل على المجاهيل والتي هي مضروب لاغرانج $\lambda$ وإحداثيات النقطة $M(x,y,z)$

- العقد منحني ناتج عن تقاطع السطحين $\phi_1(x,y,z)=cte=c_1$ & $\phi_2(x,y,z)=cte=c_2$

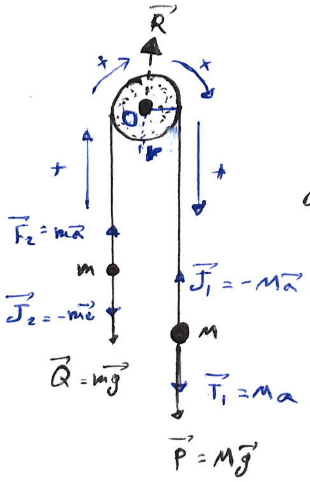
باتباع ذات الخطوات ومن ثمّ

رد فعل ناتج عن السطح الأول — رد فعل ناتج عن السطح الثاني

$$\vec f + \vec R_1 + \vec R_2 = m\vec a \Rightarrow m\vec a = \underbrace{\vec f + \vec R_{t_1} + \vec R_{t_2}}_{\vec F} + \vec R_{n_1} + \vec R_{n_2} \quad ; R_n = \lambda\,\vec{grad}\,\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec a = \vec F + \lambda_1\,\vec{grad}\,\phi_1 + \lambda_2\,\vec{grad}\,\phi_2} \xrightarrow{\text{بالإسقاط}} \begin{cases} m\ddot x = X + \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} \\ m\ddot y = Y + \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} \\ m\ddot z = Z + \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z} \end{cases} \quad ; \vec F(X,Y,Z)$$

وهي ⑤ معادلات (مع معادلتي السطح $\phi_1$ و $\phi_2$) وبـ ⑤ مجاهيل $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ وبحلها نجد المجاهيل.




## مسألة ①:

مر على حز بكرة قابلة للدوران حول محورها خيط غير قابل للامتطاط ، وقد علق في طرفيه الثقلين $\vec{P} = M\vec{g}$ و $\vec{Q} = m\vec{g}$ حيث M أكبر بقليل من m ووزن الخيط مهمل كما بالشكل والمطلوب :

① . أوجد تسارع الجملة بطريقتي نيوتن والمبير

② . أوجد الضغط المطبق على محور البكرة في حالتي السكون والحركة ثم وازن بينهما

③ . أوجد توتر الخيط في حالة الحركة .

### الجواب :

① . طريقة نيوتن :

- الجملة ككل تكتسب تسارعاً واحداً لكون الخيط لا يمتط

- بتطبيق قانون نيوتن على كل كتلة على حدا نجد :

على الكتلة m : $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \Rightarrow -mg + T = ma \Rightarrow T = m(g+a)$

على الكتلة M : $\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} \Rightarrow Mg - T = Ma \Rightarrow T = M(g-a)$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M-m}{M+m}\, g}$$

تجدر الإشارة أننا اعتبرنا أن قوة توتر فرع الخيط المؤثرة على m مساوية لقوة توتر فرع الخيط المؤثرة على M وذلك لتقارب الكتلتين بالكتلة .

طريقة دالمبير :

- بتطبيق شرط التوازن :

$$\Rightarrow \vec{\mu}(\vec{F} + \vec{J}) + \vec{\mu}(\vec{R}) = 0$$

- القوى الفاعلة هنا هي : $\vec{P} = M\vec{g}$ ، $Q = m\vec{g}$ و $\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q}$

- كما أن : $\vec{R} = 2\vec{T}$ [ مجموع قوتي توتر فرعي الخيط المتساويتين تساوي قوة رد الفعل $\vec{R}$ المؤثرة على محور دوران البكرة ]

- وباتخاذ محور البكرة O مركزاً لحساب العزوم والاتجاه الموجب الموافق لجهة الدوران نجد :

$$\vec{\mu}(\vec{P} + \vec{J}_1 + \vec{Q} + \vec{J}_2) + \underbrace{\vec{\mu}(\vec{R})}_{\text{حامل القوة يمر من مركز العزوم}} = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{J}_1 + \vec{r} \times \vec{Q} + \vec{r} \times \vec{J}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow r.P - r\,Ma - r\,Q - r\,ma = 0 \Rightarrow P - Q = (M+m)a \rightarrow$$

- وبما أن : $M = \frac{P}{g}$ و $m = \frac{Q}{g}$ نجد :

$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right) g$ ( بدلالة الكتل ) ؛ $a = \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right) g$ ( بدلالة الوزن )

## ④. نظرية الطاقة الحركية للنقطة المقيدة :

**حالة ①:** القيد عبارة عن سطح متغير مع الزمن $\phi(x,y,z,t) = ct$ :

وبمفاضلة معادلة السطح نجد أنّ:

$$d\phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot dz}_{\overrightarrow{grad}\,\phi \cdot d\vec{r}} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \overrightarrow{grad}\,\phi = -\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \quad \text{......} (*)$$

ونعلم أنّ : $dT = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{الفعالة}} + \underbrace{\vec{R}_N \cdot d\vec{r}}_{\text{غير الفعالة}}$ ولكن : $\vec{R}_N = \lambda\, \overrightarrow{grad}\,\phi$ و $(*)$

وبالتالي نجد أنّ:

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} dT \quad \text{......} (*)'$$

**حالة ②:** القيد عبارة عن منحنى متغير مع الزمن ناتج عن تقاطع السطحين $\phi_1(x,y,z,t) = c_1$ و $\phi_2(x,y,z,t) = c_2$

- وبمفاضلة علاقة السطح الأول نجد أنّ:

$$d\phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx + \frac{d \phi_1}{dy} dy + \frac{d\phi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dt = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \overrightarrow{grad}\,\phi_1 = -\lambda_1 \frac{\phi_1}{\partial t} dt \quad \text{......} (A)$$

- وبطريقة مشابهة نحصل على العلاقة :

$$\lambda_2\, grad\, \phi_2 = -\lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dt \quad \text{......} (A)'$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$dT = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{فعالة}} + \underbrace{(\vec{R}_1)_N\, d\vec{r}}_{\text{غير فعالة}} + \underbrace{(\vec{R}_2)_N\, d\vec{r}}_{\text{غير فعالة}}$$

ولكن : $(\vec{R}_1)_N = \lambda_1 \overrightarrow{grad}\,\phi_1$ و $(\vec{R}_2)_N = \lambda_2 \overrightarrow{grad}\,\phi_2$ و $(A)'$ و $(A)$

ومنه نحصل على العلاقة :

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dT - \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dT$$ وهو المطلوب.

② . ثقل الضغط على محور البكرة في حالة الحركة ⇐ رد الفعل الديناميكي $R_{dy}$

و " " " " " في حالة السكون ⇐ " " السكوني $R_{st}$ .

<u>رد الفعل السكوني على محور البكرة</u> : $R_{ST} = P+Q = cte$

<u>رد الفعل الحركي على محور البكرة</u> : والجبر : $\vec{P}+\vec{J_1}+\vec{Q}+\vec{J_2}+\vec{R}=\vec{0} \xrightarrow[\text{المحور الأفقي}]{\text{بالإسقاط على}} : P - Ma + Q + ma - R_{dy} = 0$

وبالأخذ بالإعتبار أنّ [ $a = \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)g$ و $m = \frac{Q}{g}$ و $M = \frac{P}{g}$ ) نجد أنّ : $R_{dy} = 4\frac{PQ}{P+Q}$

- <u>للموازنة بينهما نوجد الفرق بينهما</u> :

$$R_{st} - R_{dy} = P+Q - 4\frac{PQ}{P+Q} = \frac{(P-Q)^2}{P+Q} = \kappa > 0 \Rightarrow R_{st} = R_{dy} + \kappa = cte$$

- وكما نلاحظ فانّ زيادة $\kappa$ مقترنة بزيادة الفرق $(P-Q)$ أي كلما كان $P \gg Q$ وعندها يصبح $R_{dy}$ أقل ما يمكن .

- ونلاحظ أنّهُ إذا انقطع الخيط الحامل للكتلة $m$ يكون $Q=0$ ومن ثمّ $R_{dy}=0$

ويصبح $\kappa$ أكبر ما يمكن : $R_{st} = \kappa = \frac{P^2}{P} = P$ .

③ . حساب شدة توتر الخيط :

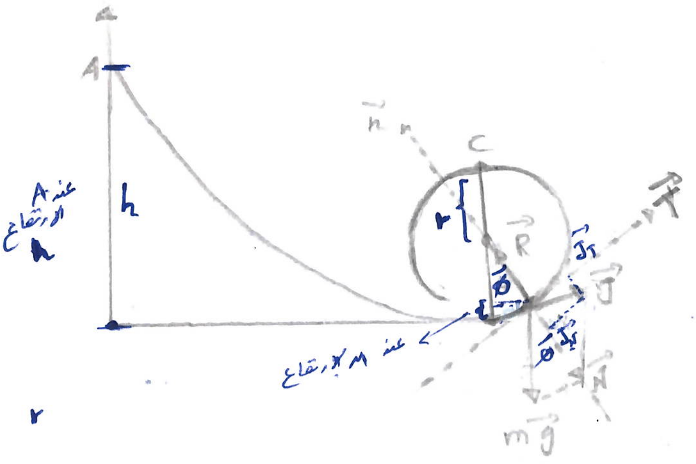
<u>في حالة الحركة</u> : $R_{dy} = 2T \Longrightarrow T = \frac{R_{dy}}{2} = 2\frac{PQ}{P+Q}$

<u>مسألة ②</u> :

تسقط نقطة مادية M نقطية كتلتها $m$ بدون سرعة ابتدائية أو إحتكاك من A التي ارتفاعها $h$ ، سالكة الطريق المبين بالشكل والذي ينتهي بدارة نصف قطرها $r$ ( المسار الأنشوطي ). <u>والمطلوب</u> :

حساب أدنى ارتفاع للسقوط $h$ الذي يُمكّن $m$ من اجتياز كامل المسار الدائري دون الإنفلات عنهُ بطريقتي نيوتن والجبر .

<u>الجواب</u> :




- يتعين وضع النقطة M على الطريق بواسطة الزاوية $\phi$ الواقعة بين الشاقول و $\vec{OM}$ كما بالشكل

<u>طريقة نيوتن</u> :

- القوى المؤثرة هي : $\vec{P} = m\vec{g}$ و $\vec{R}$ (المنطبقة على الناظم $\vec{n}$ لأنّ الحركة تتم من دون إحتكاك )

- المسار دائري ⇐ التسارع الكلي تسارع ناظمي : $\vec{a}_n = m\frac{v^2}{r}\vec{n}$

- بتطبيق قانون نيوتن في التحريك : $\vec{F} = m\vec{a}$ نجد :

$$\vec{F} = m\frac{v^2}{r}\vec{n} = \vec{R} + \vec{P} \xrightarrow[\vec{n}]{\text{بالإسقاط على الناظم}} m\frac{v^2}{r} = R - mg\cos\phi \quad ①$$

- لدينا :

$$E = T + U = cte \rightarrow dE = dT + dU = 0 \Rightarrow dT = -dU$$

نجد بالمكاملة :

$$\int_0^{v} dT = -\int_A^M dU \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = U_A - U_M \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh - mg(r - r\cos\phi)$$

السقوط بدون سرعة ابتدائية

$$\Rightarrow mv^2 = 2mg(h - r + r\cos\phi) \Rightarrow \div r$$ نجد : $$m\frac{v^2}{r} = \frac{2mg}{r}(h - r + r\cos\phi) \quad (2)$$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$\boxed{R = mg\left(\frac{2h}{r} - 2 + 3\cos\phi\right)}$$

- يحصل الانفكاك $R=0$ أو $R \geq 0$ عندما : $\phi = \pi$ [عند أعلى نقطة من المسار الدائري ؛ أي لما تكون المقطة تصف المسار الدائري)

أي عندما :

$$\frac{2h}{r} - 2 + 3\cos\phi \geq 0 \Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2}r}$$

طريقة دالمبير :

لدينا قوة العطالة : $\vec{J} = \vec{J}_T + \vec{J}_n = J_T\vec{T} + J_n\vec{n}$

قوة العطالة المماسية : $J_T = -ma_T = -m\frac{dv}{dt}$

قوة العطالة الناظمية : $J_n = -ma_n = -m\frac{v^2}{r}$

[ السرعة متناقصة مع الزمن (المشتق سالب $\frac{dv}{dt} < 0$ ) وذلك لأن المقطة تتحرك صاعدة على الطريق تحت تأثير ثقلها ، وبالتالي $\vec{J}_T$ تتجه نحو الأعلى مع الاتجاه الموجب للمماس ]

[ تتجه بعكس اتجاه الشعاع الناظمي أي نحو الخارج ]

- والآن بتطبيق مبدأ دالمبير نجد :

(تتوازن في كل لحظة من لحظات الحركة القوى المطبقة $\vec{F} + \vec{J}$ مع رد الفعل $\vec{R}$ ) ونكتب :

$$\vec{F} + \vec{J} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{J}_T + \vec{J}_n + \vec{R} = 0$$

وبالإسقاط على الناظم نجد أن :

$$-mg\cos\phi + 0 - m\frac{v^2}{r} + R = 0 \Rightarrow R = mg\cos\phi + m\frac{v^2}{r} \quad (3)$$

- ومن جهة أخرى لدينا :

$$E = T + V = const \Rightarrow dE = dT + dU = 0 \Rightarrow dT = -dU$$

وبمكاملة الطرفين بين نقطة البداية A والنقطة M التي يصنع فيها المحرك الزاوية $\phi$ نجد :

$$\int_0^{v} dT = -\int_A^M dU \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg - mg(r - r\cos\phi) \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{2mg}{r}(h - r + r\cos\phi) \quad (4)$$

وبتعويض (4) في (3) نجد :

$$R = mg\cos\phi + \frac{2mg}{r}(h - r + r\cos\phi) \Rightarrow \boxed{R = mg\left(\frac{2h}{r} - 2 + 3\cos\phi\right)}$$

- يجب أن تتحقق المتراجحة $R \geq 0$ على الأقل في المجال $\phi \in [0, \pi]$ وذلك لكي تكمل المقطة كامل المسار الدائري دون الانفكاك عنه ؛ أي يجب أن يكون هنالك وجود لقوة رد الفعل ، ونكتب :

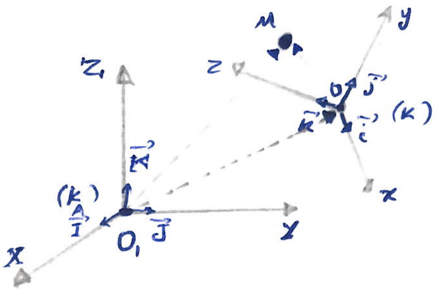
$$\boxed{R = mg\left(\frac{2h}{r} - 2 + 3\cos\phi\right) \geq 0}$$

* نفرض أن الانعكاس $R=0$ يحصل عند $\phi=\pi$ (عند اعتبار $M$ نصف المسار الدائري) ، أي عندها
وعلى

$$mg\left(\frac{2h}{r}-2+3\cos\phi\right)=0 \; ; \; mg\neq 0 \Rightarrow \left.\frac{2h}{r}-2+3\cos\phi\right|_{\phi=\pi}=0 \Rightarrow \boxed{h=\frac{5}{2}r}$$

نجد أن الارتفاع اللازم (الحد) لإكمال نصف المسار الدائري هو $h=\frac{5}{2}r$ ، وبالتالي يمكن القول أن السقوط حيث من أجل ارتفاع أكبر قليل من هذه القيمة أي : $\boxed{h>\frac{5}{2}}$

---




## (5) الدراسة الحركية للحركة النسبية :

- ليكن لدينا جمليتين (كما في الشكل جانباً) :
* الأولى $(K_A)$ ثابتة (جملة مطلقة).
* والثانية $(K)$ وهي جملة متحركة حركتين انسحابية ودورانية معاً وتكون النقطة المادية المدروسة متماسكة معها.

- تسمى حركة $M$ بالنسبة إلى $K$ حركة نسبية $(r)$ .
- تسمى حركة $K$ بالنسبة إلى $K_A$ حركة جرية $(e)$ .
- تسمى حركة $M$ بالنسبة إلى $K_A$ حركة مطلقة $(A)$

* ووفقاً للكلام السابق :
- فإن مراقباً ساكناً في $(K_A)$ سيرى حركتين ، الأولى : حركة الجملة $K$ والثانية حركة النقطة $M$ الذاتية ناتجة عن حركة للنقطة M .
- وبالنسبة لمراقب ساكناً في $(K)$ سيرى حركة واحدة للنقطة $M$ وهي حركتها الذاتية . ⇐ الحركة نسبية .

(1) تحديد الموضع المطلق للنقطة M : من الشكل نجد أن : $(\vec{O_1M})_A=(\vec{O_1O})_e+(\vec{OM})_r=(\vec{O_1O})_e+x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

حيث الحد :

$(\vec{O_1O})_e$ : شعاع موضع مركز الجملة المتحركة $(O)$ بالنسبة للجملة الثابتة [الموضع الجري] .

$(\vec{OM})_r$ : شعاع الموضع للنقطة $M$ في جملتها المتماسكة معها $(K)$ أي [الموضع النسبي] .

(2) الحصول على عبارة السرعة المطلقة : نشتق عبارة الموضع المطلق للنقطة M بالنسبة للزمن ؛

$$\vec{v}_A=\frac{d(\vec{O_1M})_A}{dt}=\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt}+\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}+x\frac{d\vec{i}}{dt}+y\frac{d\vec{j}}{dt}+z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

- المتجهات $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للجملة $K$ لها مشتقات زمنية وذلك لأنها متحركة حركة انسحابية ودورانية وبالتالي هي ثابتة الشدة متغيرة بتغير الاتجاه .

- ومن جهة أخرى لدينا العلاقة الأساسية بين التحريكين الخطي والزاوي : $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{w}\times\vec{r}$ ; $\vec{r}=(\vec{OM})_r$

وبالمشابهة : $\vec{i}'=\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{w}\times\vec{i}$ & $\vec{j}'=\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{w}\times\vec{j}$ & $\vec{k}'=\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{w}\times\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{v}_A=\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt}+x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}+\vec{w}\times\underbrace{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}_{(\vec{OM})_r}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \frac{d(\vec{O_1M})_A}{dt} = \underbrace{\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{OM})_r}_{\vec{v}_e(M)} + \underbrace{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}_{\vec{v}_r(M)} = \vec{v}_e(M) + \vec{v}_r(M)$$

تسمية الحدود :

- يمثل الحد $\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt}$ السرعة الخطية الإستطاعية لمركز المعلم المتحرك $(O)$ بالنسبة للمعلم الثابت $(k)$، وبما أن $M$ متماسكة مع $K$ فهو يمثل سرعة استطاعية لها.
- يمثل الحد $\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r$ السرعة الخطية لدوران النقطة $M$ ومعلمها المتماسكة معها $(K)$ حول نفسها
- يمثل الحد $\vec{v}_e(M)$ مجموع السرعتين الدورانية والإستطاعية للنقطة $M$ المتماسكة مع $(K)$ [ السرعة الجرية ]
- يمثل الحد $\vec{v}_r(M)$ السرعة الخطية للنقطة $M$ في معلمها المتماسكة معها $(k)$ [ السرعة النسبية ]

(3). للحصول على عبارة التسارع المطلق نشتق عبارة السرعة المطلقة بالنسبة للزمن :

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A(M)}{dt} = \frac{d^2(\vec{O_1O})_e}{dt^2} + \vec{\omega}' \times (\vec{OM})_r + \underbrace{\vec{\omega} \times \frac{d(\vec{OM})_r}{dt}}_{(*)} + x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

$$+ x'(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y'(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z'(\vec{\omega} \times \vec{k})$$

$$(*) = \vec{\omega} \times \frac{d(\vec{OM})_r}{dt} = \vec{\omega} \times [\underbrace{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}'}_{\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r}]$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r]$$

وبالتعويض نجد :

$$\vec{a}_A = \underbrace{\frac{d^2(\vec{O_1O})_e}{dt^2} + \vec{\omega}' \times (\vec{OM})_r + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r]}_{\vec{a}_e} + \underbrace{x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_r}_{\vec{a}_c} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

تسمية الحدود :

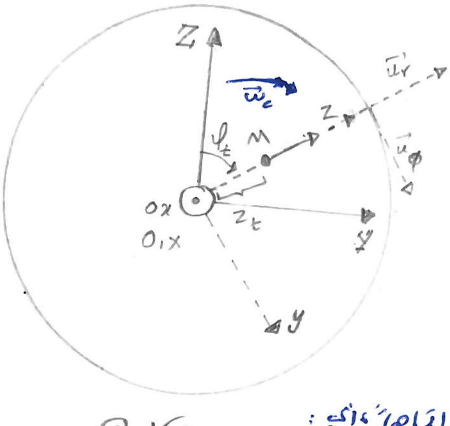
- يمثل الحد $\frac{d^2(\vec{OO_1})}{dt^2}$ التسارع الإستطاعي لمركز المعلم المتحركة $(o)$ بالنسبة للمعلم الثابت $(k)$، وبما أن $M$ متماسكة مع $k$ فهو يمثل تسارعا انسحابيا لها
- يمثل الحد $\vec{\omega}' \times (\vec{OM})_r$ التسارع المماسي لدوران النقطة $(M)$ ومعلمها المتماسكة معها $(K)$ حول نفسها
- يمثل الحد $\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r]$ التسارع الناظمي لدوران النقطة $(M)$ ومعلمها المتماسكة معها $(K)$ حول نفسها
- يمثل الحدين $[\vec{\omega}' \times (\vec{OM})_r + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r]]$ التسارع الدوراني للنقطة $M$ ومعلمها المتماسكة معها $(k)$ حول نفسها
- يمثل الحد $\vec{a}_e$ مجموع التسارعين الدوراني والإستطاعي للنقطة $M$ المتماسكة مع $k$ [ التسارع الجري ]
- يمثل الحد $\vec{a}_r$ التسارع للنقطة $M$ في معلمها المتماسكة معها [ التسارع النسبي ]
- يمثل الحد $\vec{a}_c$ تسارع كوريوليس (التسارع المتمم).

**مسألة ③** : تتحرك نملة حركة منتظمة على عقرب الثواني لساعة حائط بجهة الابتعاد عن المركز، علماً أن حركة العقرب الدورانية تتم بشكل استثنائي (دون قفز)، وأن النملة تصل إلى الطرف الآخر للعقرب عند إتمامه دورة كاملة. المطلوب: ادرس حركة النملة [حدد المقادير المطلقة التالية، الموضع، السرعة، التسارع] في كل لحظة بدلالة زاوية دوران العقرب $\varphi_t = \omega t$. ثم ارسم مخططاً لمسار النملة توضح عليه السرعة النسبية $\vec{v}_r$، والسرعة الجرية $\vec{v}_e$، والسرعة المطلقة $\vec{v}_A$، وشعاع كوريوليس $\vec{a}_c$، والتسارع الجري $\vec{a}_e$ والتسارع المطلق $\vec{a}_A$.

**الجواب**

- نفرض أن ① المعلمات الثابتة $(0,x,y,z)^{k}$ والمتحركة $(0,X,Y,Z)^{k_A}$ منطبقتان لحظة بدء النملة بالحركة، و ② $k$ تتحرك دورانياً فقط حول $OX$.

③ ونفرض أن العقرب الدوار مقترن بالمحور $OZ$ من المعلم المتحرك $k$ كما بالشكل ⓐ



الشكل ⓐ

وبناء على هذه الافتراضات أن

- فنلاحظ أن:

① مركزي المعلمين منطبقين ← الحركة الانسحابية لـ $k$ معدومة دوماً، أي: $\frac{d(\vec{OO_1})_e}{dt} = \vec{0}$

② وأن العقرب يتحرك في المستوي $(Y O_1 Z)$ من $k_A$ الثابتة.

③ وأن المحوران $OX$ و $O_1X$ منطبقان دوماً.

- وبما أن حركة عقرب الثواني دائرية منتظمة ← $\vec{\omega}_e$ السرعة الزاوية لـ $k$ ثابتة شدة واتجاهاً، أي:

$$\vec{\omega} = -\omega\vec{i} = \vec{ct}$$

☒ **دراسة الموضع المطلق:**

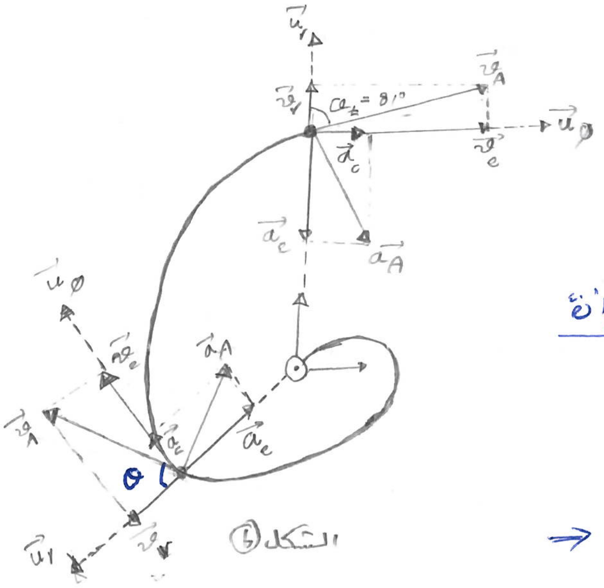
- نفرض أن $\varphi_t$ هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر المتجه المحدد لموضع النقطة M مع $\vec{O_1Z}$ في اللحظة t ونكتب:

$$\vec{O_1M} = \vec{OM} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + Z_t\vec{K} \Rightarrow \vec{O_1M} = \vec{OM} = Z_t\vec{K}$$

وللبرهان جهة أخرى: $(\vec{O_1M})_A = (\vec{O_1O})_e + (\vec{OM})_r \Rightarrow (\vec{O_1M})_A = (\vec{OM})_r = OM\,\vec{u}_r = Z_t\vec{K}$ و $\vec{K} \equiv \vec{u}_r$ & $\vec{J} \equiv \vec{u}_\varphi$

وهذا ما ينسجم مع عبارة الموضع في الإحداثيات القطبية.

- وأن المسار الذي ترسمه النملة خلال دورة كاملة لعقرب الثواني هو حلزون (سيكلوئيد) كما في الشكل ⓑ.



الشكل ⓑ

☒ **حساب السرعة المطلقة في كافة مراحل الحركة:**

نعلم أن:

$$\vec{v}_A(M) = \underbrace{\underbrace{\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt}}_{0} + \vec{\omega}\times(\vec{OM})_r}_{\vec{v}_e(M)} + \underbrace{\underbrace{x'\vec{i}}_{0} + \underbrace{y'\vec{j}}_{0} + \underbrace{z'\vec{K}}_{Z'_t\vec{K}}}_{\vec{v}_r(M)}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A(M) = \underbrace{-\omega\vec{i}\times Z_t\vec{K}}_{\vec{v}_e(M)} + \underbrace{Z'_t\vec{K}}_{\vec{v}_r(M)} \quad \text{و} \quad \vec{i}\times\vec{K} = -\vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A(M) = \underbrace{\omega Z_t \vec{u}_\varnothing}_{\vec{v}_e(M)} + \underbrace{Z'_t \vec{K}}_{\vec{v}_r(M)}$$

وهذا ينسجم مع عبارة السرعة في الإحداثيات القطبية :

$$\vec{v}_A(M) = \underbrace{Z'_t \vec{u}_r}_{\vec{v}_r(M)} + \underbrace{\varnothing'_t Z_t \vec{u}_\varnothing}_{\vec{v}_e(M)} \quad \text{و} \quad \omega = \varnothing'_t = \frac{d\varnothing_t}{dt} = cte$$

نناقش عبارة السرعة المطلقة مع الرسم الموضح بالشكل (b) ، كما يلي :

- (1) على اعتبار أن حركة الحلقة على العقرب منتظمة ⟸ $|\vec{v}_r(M)|$ تبقى ثابتة طيلة الحركة ، وهي منطبقة (2) دوما على المحور OZ (عقرب الثواني) ، (3) ومتفقة في الجهة مع $\vec{u}_r$ ، (4) ونكتب : $\boxed{|\vec{v}_r(M)| = |Z'_t \vec{u}_r| = Z'_t = cte}$

- (1) كما نرى أن السرعة الجرّية متزايدة بازدياد المسافة $Z_t$ التي تقطعها الحلقة على عقرب الثواني بمرور الزمن ، وهي محمولة على المماس للمسار ، ومتفقة في الجهة مع $\vec{u}_\varnothing$ ، ونكتب : $\boxed{|\vec{v}_e(M)| = |\omega Z_t \vec{u}_\varnothing| = \omega Z_t}$

- وبما أن $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\varnothing \Longleftarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_e \Longleftarrow |\vec{v}_A(M)| = \sqrt{|\vec{v}_r(M)|^2 + |\vec{v}_e(M)|^2} = \sqrt{Z'^2_t + \omega^2 Z_t^2}$

إذن : سوف تمثل السرعة المطلقة ( $\vec{v}_A = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ ) بقطر المستطيل المنشأ على متجهي السرعة $\vec{v}_r(M)$ و $\vec{v}_e(M)$ في كل لحظة من لحظات الحركة .

- كما نلاحظ أن الزاوية $\theta_t$ الكائنة بين $\vec{v}_A$ و OZ متزايدة (بدءا من الصفر) منذ بدء الحركة وحتى إتمام العقرب لدورة كاملة .

☒ حساب التسارع المطلق في كافة مراحل الحركة :

لدينا عبارة التسارع المطلق : $\vec{a}_A = \underbrace{\frac{d^2(\vec{O_1O})_e}{dt^2}}_{0} + \underbrace{\vec{\omega}' \times (\vec{OM})_r}_{0} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r] + \underbrace{X''\vec{i}}_{0} + \underbrace{Y''\vec{j}}_{0} + \underbrace{Z''\vec{k}}_{0} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

حيث أن : $\vec{\omega} = cte \Rightarrow \omega' = 0$ & $Z'_t = cte \Rightarrow Z''_t = 0$

وعليه يكون : $\vec{a}_A(M) = \frac{d\vec{v}_A(M)}{dt} = \underbrace{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{OM})_r]}_{\vec{a}_e} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_r}_{\vec{a}_c}$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{OM}) - \vec{OM}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{OM} \ ; \ \vec{\omega} \perp (\vec{OM}) \Rightarrow \vec{a}_e(M) = -\omega^2 Z_t \vec{k}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = -2\omega \vec{i} \times Z'_t \vec{k} = 2\omega Z'_t \vec{u}_\varnothing = 2\omega v_r \vec{u}_\varnothing \Rightarrow \vec{a}_c(M) = 2\omega v_r \vec{u}_\varnothing$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -\omega^2 Z_t \vec{K} + 2\omega v_r \vec{u}_\varnothing$$

نناقش عبارة التسارع المطلق مع الرسم الموضح بالشكل (b) ، كما يلي :

- نرى أن $|\vec{a}_e(M)|$ يزداد بمرور الزمن بازدياد المسافة $Z_t$ التي تقطعها الحلقة ، وهو محمول على المحور OZ ، ويعاكس بالجهة $\vec{u}_r$ ، ونكتب : $\boxed{|\vec{a}_e(M)| = \omega^2 Z_t = \omega\omega Z_t = \omega v_e}$

- كما أن $|\vec{a}_c(M)|$ ثابت بمرور الزمن (من ثبات $v_r$ و $\omega$) ، وهو محمول على المماس للمسار ، وله اتجاه موافق لـ $\vec{u}_\varnothing$ ، ونكتب : $\boxed{|\vec{a}_c(M)| = 2\omega v_r = cte}$

- $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\varnothing \Longleftarrow \vec{a}_e \perp \vec{a}_c \Longleftarrow \vec{a}_A = \vec{a}_c + \vec{a}_e$ ، $\boxed{|\vec{a}_A(M)| = \sqrt{4\omega^2 v_r^2 + \omega^4 Z_t^2} = \omega\sqrt{4v_r^2 + \omega^2 Z_t^2} = \omega\sqrt{4v_r^2 + v_e^2}}$

إذن : $\vec{a}_A$ ما هو إلا قطر المستطيل المنشأ على $\vec{a}_c , \vec{a}_e$

## 6" معادلات الحركة في الحمل المطالية واللاعطالية :

- من وجهة نظر الراصد في $(K_A)$ تكون محصلة القوى $\vec{F_A}$ المؤثرة في الكتلة m هي :

$$\vec{F_A} = m(\vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c})$$

- ومن وجهة نظر الراصد في الحمله (K) المتحركة سيقيس القوة النسبية $\vec{F_r} = m\vec{a_r}$ بـ اعتبارها محصلة القوى المؤثرة في m أي :

$$m\vec{a_r} = \vec{F_A} - m\vec{a_e} - m\vec{a_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec{a_r} = \vec{F_A} + \vec{J_e} + \vec{J_c}} \quad (1)'$$

$\vec{J_e}$ : قوة العطالة الجرية و $\vec{J_c}$ : قوة العطالة المتممة

- إذا كانت للحدود $\vec{J_e}$ و $\vec{J_c}$ قيمة ذات شأن (لا يمكن إهمالها) $\Leftarrow$ الحملة K تكون لاعطالية بينما إذا كانت قيمتها مهملة (أو يمكن إهمالها كتقريب جيد) $\Leftarrow$ الحملة K حملة عطالية يتحقق منها قانون نيوتن :

$$m\vec{a_r} = \vec{F_A}$$

- عموماً: يمكن القول عن (K) أنها عطالية إذا حققت الشرطان التاليان :

(1). إذا كان تسارع مركزها $A(K)$ بالنسبة لـ $(K_A)$ معدوم ، أي: $\frac{d^2(\vec{OO'})_e}{dt^2} = \vec{0}$ (أي أنها إمّا ساكنة أو تتحرك بسرعة ثابتة)

(2). إذا كانت (K) لا تدور [سرعتها الزاوية بالنسبة للراصد $(K_A)$] معدومة ، أي: $\vec{\omega} = 0$

ملاحظة: يجب أن ينعدم حدي العطالة كلاهما لتكون عطالية ، لا يكفي إنعدام أحدهما للقول بأنها حملة عطالية

- إذا كانت الكتلة m مرتبطة بقيد ، عندئذٍ تصبح (1)' بالشكل :

$$\boxed{m\vec{a_r} = \vec{F_A} + \vec{R} + \vec{J_e} + \vec{J_c}} \quad (2)'$$

## 7". معادلات التوازن النسبي :

- إذا كان $m\vec{a_r} = 0$ & $\vec{\omega}$ $(\vec{F_r} = m\vec{a_r}) = 0 \Rightarrow$ الكتلة m متوازنة من وجهة نظر المراقب في K

- من أجل $\vec{F_r} = m\vec{a_r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a_r} = \vec{0}$ هناك احتمالين لحركة الكتلة m طبقاً لقانون نيوتن الأول :

الاحتمال الأول : تتحرك m حركة مستقيمة منتظمة في . بالنسبة لـ K وبالتالي : $v_r = cte$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_A} + \vec{J_e} + \vec{J_c} = 0}$$

الاحتمال الثاني : الكتلة m ساكنة بالنسبة للراصد في K وبالتالي : $v_r = 0$

$$\Rightarrow \vec{F_A} + \vec{J_e} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F_A} = -\vec{J_e}}$$

أي : يجب أن تكون محصلة القوى المطلقة معاكسة لقوة العطالة الجرية .

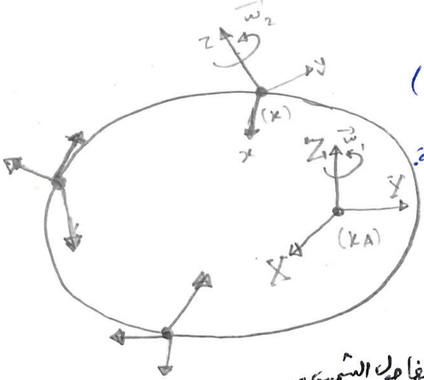
تطبيق : ابحث في أثر دوران الأرض ( $\vec{\omega}_1$ حول الشمس) و ( $\vec{\omega}_2$ حول محورها) على حدي العطالة $\vec{J}_e$ و $\vec{J}_c$ وإلى أي مدى يمكن اعتبارها معلمة عطالية بالنسبة إلى معلمة كوبرنيكوس الثابتة المرتبطة بالشمس.

الإحداثيات المرتبطة بـ الأرض

الجواب :

* لا يوجد حركة انسحابية للأرض بالنسبة للشمس ( محصلة القوى معدومة ، شعاع المحصلة $\vec{a}=\vec{0}$ )

ولكن : الحركة الدورانية لها ناتجة عن عزم عطالتها $I = MR^2$ وبالتالي لتأثير العزم الحركي $\vec{I} = I\vec{\omega}$ ، وعليه يمكن اعتبار السرعة الخطية للأرض بالنسبة للشمس شبه ثابتة.




• نحسب قيمة كل من $\omega_1$ و $\omega_2$ كالتالي :

الزمن الذي تحتاجه الأرض للدوران حول الشمس دورة واحدة

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{365\times24\times3600} \simeq 2\times10^{-7}\ rad/s \quad \& \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{24\times3600} \simeq 7,2\times10^{-5}\ rad/s$$

أولاً حساب أثر $\omega_1$ على حدي العطالة $\vec{J}_e$ و $\vec{J}_c$ :

كون $\frac{d(\vec{O_1O})_e}{dt}$ ① السرعة الانتقالية لمركز الأرض أثناء دورانها حول الشمس تعتبر ثابتة تقريبا وتساوي 30 km/h

من رتبة $10^{-14}$ (مهملة)

$$-\vec{J}_e = -m\vec{a}_e = -m\left[\underbrace{\frac{d^2(\vec{O_1O})_e}{dt^2}}_{0} + \underbrace{\vec{\omega}_1'\times(\vec{OM})_r}_{0\ \text{لأن}\ \omega_1\ \text{ثابتة}} + \underbrace{\omega_1\times[\vec{\omega}_1\times(\vec{OM})_r]}_{\simeq 10^{-14}\to 0}\right] \simeq 0N \quad ; \quad \vec{\omega}_1 = cte \Rightarrow \vec{\omega}_1' = 0$$

$$-\vec{J}_c = -m\vec{a}_c = -2m\,\vec{\omega}_1\times\vec{v}_r \to \simeq 10^{-7}N \to 0N$$

وبما أن القيم الحسابية لحدي العطالة ( $10^{-14}$ و $10^{-7}$ ) بالغة في الصغر فإن تأثيرها لا يذكر على قوانين الحركة في معلمة الأرض ⇐

يمكن إهمال $\vec{J}_e$ و $\vec{J}_c$ الناتجة عن دوران الأرض حول الشمس [حيث تأثيرها على الأجسام المتحركة بمحيط الأرض جد صغيرة]

ثانياً: حساب أثر $\omega_2$ على حدي العطالة $\vec{J}_e$ و $\vec{J}_c$ :

بشكل مشابه : $\vec{J}_e \to 10^{-10}N \simeq 0$ [أي أن حد العطالة $J_e$ الناتج عن دوران الأرض حول نفسها يمكن إهماله]

لأن $\underbrace{\frac{d^2(\vec{O_1O})}{dt^2}}_{0}$ [لا يوجد انسحاب] & $\underbrace{\omega_2'\times(\vec{OM})}_{0\ \text{لأن}\ \omega_2\ \text{ثابتة}}$ & $\underbrace{\omega_2\times[\vec{\omega}_2\times(\vec{OM})_r]}_{\omega_2^2\ \simeq\ 10^{-10}\to 0}$

$\vec{J}_c \to 10^{-15}N \simeq 0$

ملاحظة : [حد العطالة $\vec{J}_c$ يمكن إهماله عند السرعات النسبية $v_r$ الصغيرة فقط وغير ذلك تكون الأرض معلمة لا عطالية ]

لا يمكن إهمال $\vec{J}_c$

والخلاصة : يمكن اعتبار الأرض ( على الرغم من دورانها حول الشمس وحول نفسها) معلمة عطالية بشرط أن تكون السرعات النسبية $v_r$ للأجسام المتحركة في محيط "و المتماسكة معها" صغيرة.