كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : الثالثة /نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

17/10/2024 ت:

ميكانيك تحليلي - ②
محاضرة ③ - نظري

مسائل الفصل الأول - ①

المسألة الأولى - ④:

من أجل نقطة مادية تم قذفها بسرعة ابتدائية v_0 تحت تصنع زاوية α مع الأفق في وسط مقاوم، مقاومته من الشكل: $R = mf(v)$ - والمطلوب:

① ادرس حركة هذه النقطة.

② ادرس خواص المسار للقذيفة، وذلك من خلال: (القذيفة)

أ) تبيان أن السرعة الأفقية للقذيفة في تناقص مستمر.

ب) برهان أن: $tg^2\varphi^* > tg\alpha$ حيث: φ^* الزاوية بين شعاع السرعة v_x والأفق لحظة الاصطدام بالأفق.

ج) برهان أن: $v_x < v_x^*$ ، حيث: v_x^*: السرعة النهائية للقذيفة لحظة اصطدامها بالأفق.

الجواب عن المسألة - ④:

① - نلاحظ أن القوة المؤثرة في النقطة المادية هي الوحيدة: $\vec{R} = -mf(v)\vec{T}$ وقوة المقاومة: $P = m\vec{g}$ قوة الثقل

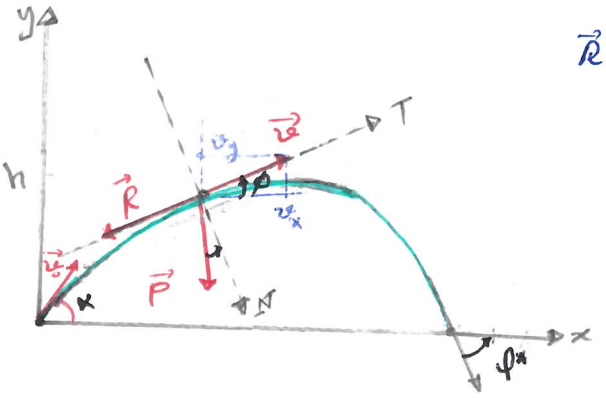
والتي تتجه دوماً بعكس اتجاه السرعة.

- سنعتمد قانون الحركة في الإحداثيات الذاتية ومنه في الإحداثيات الديكارتية.

- نكتب معادلة الحركة بالشكل:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F_i} \rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} - mf(v)\vec{T}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g} - f(v)\vec{T}} \quad (*)$$



الشكل ① يوضح مسار قذيفة في وسط مقاوم

- في المستوي (N,T) نجد بالإسقاط على مناسبة المماس والناظم المتعامدين:

المماس: $\frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi - f(v)$ ---- ①

الناظم: $\frac{v^2}{\rho} = +g\cos\varphi$ ---- ②

- وفي الإحداثيات الذاتية، لدينا:

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| \quad \text{---- ③}$$

وباعتبار أن φ تناقصية (أي: $d\varphi < 0$) و s تتزايد (أي: $ds > 0$) نكتب: (اعتبار أفق لحظة القذف)

العلاقة ③ بالشكل:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{---- ④} \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = -v^2\frac{d\varphi}{ds} = -v\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = -v\frac{d\varphi}{dt} = g\cos\varphi$$

$$\rightarrow -v\frac{d\varphi}{dt} = g\cos\varphi \quad \text{---- ⑤}$$

بتعويض (1) على (5) :

$$\frac{dv}{d\phi} = v\tan\phi + \frac{vf(v)}{g\cos\phi} \quad \text{---(6)} \quad \equiv \quad v' - v\tan\phi = \frac{vf(v)}{g\cos\phi}$$

وهي معادلة تفاضلية حلها بالشكل $v=v(\phi)$ ومن تعويض (6) يمكننا إيجاد قانون الحركة $\phi=\phi(t)$.

☒ إيجاد قانون الحركة البياني :

لدينا : $v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos\phi \longrightarrow dx = v\cos\phi\, dt$ ---(7)

$v_y = \frac{dy}{dt} = v\sin\phi \Longrightarrow dy = v\sin\phi\, dt$

- ولكن كما وجدنا أن $v=v(\phi)$ ولذلك نغير المتحول في العلاقات (7) بالاعتماد على (5) :

$$-v\frac{d\phi}{dt} = g\cos\phi \Rightarrow -\frac{v}{g}\cdot\frac{1}{\cos\phi}\,d\phi = dt$$

- وبالتعويض عن عنصر dt في (7) نجد :

$$dx = -\frac{v^2}{g}d\phi \Rightarrow x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\phi} v^2\, d\phi \quad \text{---(8)}$$

$$dy = -\frac{v^2}{g}\tan\phi\, d\phi \Rightarrow y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\phi} v^2\tan\phi\, d\phi$$

⑨ دراسة خواص المسار : الأفقية

⑨ تقاصص السرعة أثناء استمرار في وسط مقاوم اعتبارا من لحظة القذف :

- بإسقاط معادلة الحركة (*) على المحور x ، نجد :

$$\frac{dv_x}{dt} = -f(v)\cos\phi \quad \text{---(9)}$$

وهذا المقدار اصغر من الصفر لأن ϕ زاوية حادة و $f(v)$ تابع موجب دوما $\leftarrow$ v_x تتناقص مع مرور الزمن

- وفي الحالة المثالية (عدم وجود مقاومة) :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = \text{constant} \Longrightarrow v_x \text{ ثابتة} \quad \text{---(10)}$$

في وسط غير مقاوم لحركة القذيفة تبقى السرعة الأفقية للقذيفة منطبقة على قيمة ثابتة .

ب) تبيان أن $\tan\phi^* > \tan\alpha$:

- لدينا من (9) :

$$dy = -\frac{v^2}{g}\tan\phi \;\&\; v = \frac{v_x}{\cos\phi} \Rightarrow dy = -\frac{v_x^2}{g}\cdot\frac{\tan\phi}{\cos^2\phi} \Rightarrow \frac{dy}{v_x^2} = -\frac{1}{g}\,d\left(\frac{1}{2}\tan^2\phi\right) \quad \text{---(11)}$$

- وباستكمال العلاقة (11) من بداية القذف وحتى اعلى نقطة نرتفعها h ، نجد :

$$\int_0^h \frac{dy}{v_x^2} = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{0} d\left(\frac{1}{2}\tan^2\phi\right) \;\&\; = \frac{1}{2g}\tan^2\alpha \quad \text{---(12)}$$

- بإستكمال العلاقة (11) من h وحتى اصطدام القذيفة مع الأفق :

$$\int_h^0 \frac{dy}{v_x^2} = -\frac{1}{g}\int_0^{\phi^*} d\left(\frac{1}{2}\tan^2\phi\right) = -\frac{1}{2g}\tan^2\phi^* \xrightarrow{\text{بقلب حدود التكامل}} \int_0^h \frac{dy}{v_x^2} = \frac{1}{2g}\tan^2\phi^* \quad \text{---(13)}$$

- ولما كانت v_{0x} الموجودة في (12) أصغر من v_{0x}^* الموجودة في (13)، فإنّ : $tg^2\varphi^* > tg^2\varphi$ ، وبالتالي فإنّ المسار يزداد التواءً (انظر للشكل ①).

ج) برهان أنّ : $v_0 > v_0^*$:

- بضرب طرفي ① بـ v_x نجد :

$$v_x \frac{dv_x}{dt} = -g\, v_x \sin\varphi - v_x f(v_x) \quad \text{---------- (14)} \qquad \text{ولكن : } v_x \sin\varphi = v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dt = \frac{1}{v_x \sin\varphi}\, dy$$

$$(14) \Rightarrow v_x\, dv_x = -g\, dy - v_x f(v_x)\, dt$$

- وبالاستكمال للعلاقة الأخيرة بين بداية المسار ونهايته، نجد :

$$\frac{v_x^{*2} - v_0^2}{2} = -gy - \int_0^t v_x f(v_x)\, dt = -\int_0^t v_x f(v_x)\, dt$$

والمستكمل موجب $\Leftarrow v_x^{*2} - v_0^2 > 0 \Leftarrow v_0^2 > v_x^{*2}$ وهو المطلوب .

المسألة الثانية - ②:

من أعلى نقطة مادية M قذفت بسرعة ابتدائية $\vec{v_0}$ تصنع الزاوية α مع الأفق . المطلوب :

"① . ادرس حركة هذه النقطة في حقل الثقالة (نفرض ذلك) أنّ القوة الوحيدة المؤثرة في النقطة هي قوة ثقلها .

② . اوجد معادلة المسار، ثمّ أوجد أعظم مسافة شاقولية y_A وأعظم مسافة أفقية x_B ، وما استنتاجك ؟

③ . . . العلاقة التي تحسب من خلالها الزاوية α والتي من أجلها تمرّ القذيفة من نقطة ما M_1 أحداثياها (x_1, y_1) .

ولكـــن :

$$v \sin \varphi = v_y = \frac{dy}{dt}$$

وعندئذ نضع (19) بالشكل

$$v\, dv = -g\, dy - v\, f(v)\, dt$$

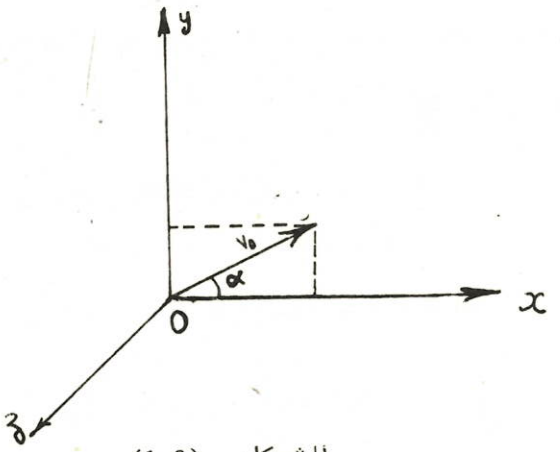
وبالاستكمال بين بداية المسار ونهايته أى بين v_o و v^* نجد :

$$\frac{v^{*2} - v_o^2}{2} = -gy - \int_o^t v f(v)\, dt = -\int_o^t v\, f(v)\, dt \quad (20)$$

ومن الواضح أن المستكمل في الطرف الأيمن هو تابع موجب وبالتالي فان نتيجة التكامل تساوى مقدارا موجبا . وبسبب الاشارة السالبة أمام التكامل سيكون الطرف الثاني سالبا وبالتالي $v^{2*} < v_o^2$ والسرعة تتناقص .

2 ـ ادرس حركة نقطة مادية في حقل الثقالة الأرضية بفرض أن القوة الوحيدة المؤثرة في هذه النقطة هي ثقلها $\overrightarrow{mg}$ ، وأنها قذفت بسرعة v_o تصنع زاوية α مع الأفق (حركة القذائف) .

الحـــل : تعتبر هذه المسألة تطبيقا على استخدام المعادلة (1.54) في حل المسائل ، حيث رأينا أن القوة قد تتبع المكان $\vec{F}$ والسرعة $\frac{d\vec{r}}{dt}$ والزمن t . وفي هذه الحالة الخاصة التي ندرسها هنا نرى أن القوة تساوى مقدارا ثابتا دوما ، بفرض أن الحركة تتم في مجال محدود بجوار الأرض حيث يمكن، بتقريب مقبول ، اعتبار تسارع الثقالة $\vec{g}$ ثابتا . ويمكن القول أيضا الى حد ما ، أن هذه المسألة هي حالة خاصة من المسألة السابقة ، تقابل انعدام المقاومة $\vec{R}$. ولكن ، على الرغم من ذلك ، رأينا أنه من المفيد حل هذه المسألة لأننا سنناقش بعض الحالات الخاصة ، بالاضافة الى أن إسقاط معادلة الحركة سيتم على محاور أخرى نختارها كما يلي :



الشـكل (1.9)

نأخذ المستوى xoy بحيث يحوى السرعـــة الابتدائية $\vec{v}_o$ ويكون فيـه المحور ox أفقيا والمحور oy شاقوليا ، أما المحور oz فيكون أفقيا متعامـدا معهما ، ونختار مبـــدأ الاحداثيات في النقطة o حيث كانت القذيفة فـــي اللحظة t=0 شكل (1.9).

ان معادلة الحركة هي :

$$m\vec{W} = \vec{F} = m\vec{g} \qquad (1)$$

وبالاسقاط على المحاور المختارة نجد (بعد الاختصار على m) :

$$mx'' = o \ , \ y'' = -g \ , \ z'' = o \qquad (2)$$

وبالاستكمال نحصل على المعادلات :

$$x' = a_1 \ , \ y' = -gt + a_2 \ , \ z' = a_3 \qquad (3)$$

ويتم حساب الثوابت a_1 ، a_2 ، a_3 انطلاقا من الشروط البدائية التي تكـــون كما يلي :

$$t=o \ , \ x_o = y_o = z_o = o \ , \ \vec{v}_o = v_o\cos\alpha\,\vec{\imath} + v_o\sin\alpha\,\vec{j} + o\vec{k} \qquad (4)$$

فاذا بدلنا هذه الشروط في المعادلات (13) نجد قانون السرعة التالي :

$$x' = v_o\cos\alpha \ , \ y' = v_o\sin\alpha - gt, \ z' = o \qquad (5)$$

وبالاستكمال ثانية نجد :

$$x = v_o\cos\alpha\ t + b_1 \ , \ y = v_o\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} + b_2 \ , \ z = b_3 \qquad (6)$$

ومن الشروط الابتدائية (4) نحسب الثوابت فنجد أن $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

وعندئذ نحصل بالتبديل في (6) على قانون الحركة التالي :

$$x = v_o \cos\alpha\, t \ , \ y = v_o \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \ , \quad z = 0 \qquad (7)$$

فالحركة اذا مستوية ،وهي تحدث في المستوى الشاقولي xoy الذى يحتوى السرعة الابتدائية $\vec{v}_o$ والقوة mg .

من الواضح أن المعادلات (7) تمثل المسار وسيطيا . ويمكن الحصول على المعادلة الديكارتية بحذف الزمن من هذه المعادلات حيث نجد :

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{g\, x^2}{2\, v_o^2 \cos^2 \alpha} \qquad (8)$$

وهي معادلة قطع مكافئ تقعره نحو الأسفل لنحسب احداثيات ذروته A (النهاية العظمى لـ y) باشتقاق (8) بالنسبة الى x تم اعدام المشتق فنجد :

$$y' = tg\alpha - \frac{gx}{v_o^2 \cos^2 \alpha} \Longrightarrow x = x_A = \frac{v_o^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha \qquad (9)$$

وبالتبديل في (8) نجد ترتيب الذروة y_A التالي :

$$y_A = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \alpha \qquad (10)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يتم القذف بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{2}$ فان المقذوف يصل الى الارتفاع التالي :

$$y_{max} = \frac{v_o^2}{2g} \qquad (11)$$

وتصطدم القذيفة بالأفق في النقطة B عندما $y = 0$ وعندئذ نجد من (8) أن:

$$x_B = 2\frac{v_o^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha = 2\, x_A \qquad (12)$$

وبالتالي فان المسار يكون متناظرا بالنسبة الى المحور الشاقولي المار من الذروة .

خلافا لما رأيناه في المسألة السابقة عندما تكون الحركة في وسط مقاوم ·

أما اذا أردنا حساب الزاوية α التي من أجلها تمر القذيفة من نقطة ما M_1 احداثياتها (x_1, y_1) (اصابة الهدف) فاننا نجد من (8) بحلها بالنسبة الى الزاوية α ، أن :

$$tg\,\alpha = \frac{v_o^2}{gx_1}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_o}\left(y_1 - \frac{g\,x_1^2}{2\,v_o^2}\right)}\right] \qquad (13)$$

أى أنه يوجد زاويتان α_1 و α_2 تحققان هذه الغاية ، شرط ان يكون المقدار المجذور موجبا أى عندما :

$$\frac{v_o}{2g} - y_1 - \frac{gx_1^2}{2v_o^2} > 0 \qquad (14)$$

مع العلم أن هاتين الزاويتين تتحدان في زاوية واحدة عندما ينعدم المقدار المجذور (جذر مضاعف) أى عندما :

$$\frac{v_o}{2g} - y_1 - \frac{gx_1^2}{2g} = 0 \qquad (15)$$

(انظر أيضا مناقشة مسألة مشابهة في نهاية الفصل الرابع تحت عنوان العلاقة بين زاوية القذف والمدى والسرعة الابتدائية) ·

3 ـ ثقل p موضوع على مستو أفقي صقيل وقد ربط بنابض ، نهايته الثانية مثبتة في نقطة ثابتة · في لحظة البدء عندما كان النابض غير مشدود أعطي الثقل صدمة الى اليمين أكسبته سرعة ابتدائية $x'_o = v_o$ شكل (1.10) · احسب أقصى مدى يصل اليه الثقل الى اليمين اذا علمت ان النابض يؤثر فيه بقوة مرونة F تعطى بالعلاقة :

$$\vec{F} = -(\alpha x + \beta x^3)\vec{i}$$

حيث x استطالة النابض ·

مسائل الفصل الثاني - ②

المسألة الأولى - ①:

برهن بطريقة شعاعية أن مسار كوكب حول الشمس هو قطع مخروطي.

الجواب - ①:

- لدينا القوة المتبادلة هي قوة القانون العالمي ⇐ قوة مركزية، ونكتب عن أجلها قانون نيوتن بالشكل:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -f\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -f\frac{M}{r^2}\vec{e}_r \quad \cdots\cdots (1)$$

- ومن جهة أخرى، من أجل حقل مركزي فإن قانون السطوح محفوظ، ونكتب:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v}) = \vec{c}_1 \rightarrow (\vec{r}\times\vec{v}) = \vec{c} \quad \cdots (2)$$ ؛ $\vec{c}$: شعاع ثابت

↳ وشعاعه المطلقة يساوي ضعف العينة المطلقة لشعاع السرعة السطحية.

- نضرب طرفي (1) بـ (2) خارجياً طرفاً لطرف نجد:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{c} = -f\frac{M}{r^2}\vec{e}_r\times(\vec{r}\times\vec{v}) = -f\frac{M}{r^2}\vec{e}_r\times(r\vec{e}_r\times\vec{v}) \quad \cdots (3)$$

- وبما أن $\vec{c}$ شعاع ثابت فإنه يمكن وضع المعادلة السابقة بالشكل:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{c}) = -f\frac{M}{r}[\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{v})] \quad \cdots (4)$$

- ولكن:

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{v}) = \vec{e}_r\cdot(\vec{e}_r\cdot\vec{v}) - \vec{v}\cdot(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r) = \vec{e}_r\cdot(\vec{e}_r\cdot\vec{v}) - \vec{v} \quad \cdots (5)$$

ومعلوم أن:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = r'\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \cdots (6)$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{v}) = \vec{e}_r[\vec{e}_r\cdot(r'\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt})] - [r'\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}]$$

$$= \vec{e}_r[r' - 0] - r'\vec{e}_r - r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \Rightarrow \vec{e}_r\times(\vec{e}_r\times\vec{v}) = -r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \cdots (7)$$

- والآن، بتعويض (7) في (4) نجد أن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{c}) = +fM\frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \cdots (8)$$

- وبالاستكمال نجد أن:

$$\vec{v}\times\vec{c} = fM\vec{e}_r + \vec{A} \quad ; \quad \vec{A}: \text{ثابت التكامل} \quad \cdots (9)$$

- وبضرب طرفي (9) عددياً بـ $\vec{r}$، نجد:

$$\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{c}) = \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}) = c^2 = fM\,\vec{e}_r\cdot\vec{r} + \vec{A}\cdot\vec{r} \quad \cdots (10)$$

$$\Rightarrow c^2 = fMr + Ar\cos\theta \quad ; \quad \theta = (\hat{\vec{A}},\vec{r}) \quad \cdots (11)$$

- ومن ⑨، نستطيع حساب r، بالشكل:

$$r = \frac{C^2}{fM + A\cos\alpha} = \frac{C^2/fM}{1 + \frac{A}{f.M}\cos\alpha} = \frac{p}{1 + e\cos\alpha} \quad \text{---- (12)}$$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة قطع مخروطي وسيطه $p = \frac{C^2}{f.M}$ وتباعده المركزي $e = \frac{c}{f.M}$

المسألة الثانية - ② :

من أجل نقطة مادية تتحرك في حقل قوى مركزي كمونه $V(\rho)$. المطلوب

"① - انطلاقاً من تكامل الطاقة والعزم الحركي أوجد قانون الحركة لهذه النقطة.

"② - كيف يتبع قانون الحركة السابق في الحقل النيوتوني $V(r) = -\frac{\kappa}{\rho}$ [مسألة كبلر]. ثم عرف الكمون الفعال، وبيانياً متى يكون للحركة منحى موضحاً ذلك بالرسم المناسب؟ ثم أوجد ρ_{min} المواقفة أوجد للنهاية الحدية الدنيا للكمون الفعال V_{eff} أو معدوم V_{eff} ثم أوجد صيغة V_{eff} المواقفة لها بدلالة كل من κ و ρ على حدا.

"③ - ناقش الحركة وذلك في الحالات الطاقية التالية، موضحاً ذلك بالرسم المناسب:

(P). $E = E_1 < (V_{eff})_{min}$ (Q). $E = E_2 = (V_{eff})_{min}$

(R). $(V_{eff}) < E_3 < 0$ (S). $E_4 > (V_{eff})_{min}$; $E_4 > 0$

الجواب على المسألة - ② :

"①. لدينا تكامل الطاقة والسطوح بالشكل:

تكامل الطاقة: $T + V = E \Rightarrow \frac{1}{2}m(\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2) + V(\rho) = E$ ---- (1)

تكامل السطوح: $L = m\rho^2\varphi' = L_c$ ---- (2) $\Rightarrow \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m\rho^2}$ ---- (3)

- وبتعويض (2) في (1) نجد أن:

$$\frac{1}{2}m\left(\rho'^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2}\right) + V(\rho) = E \Rightarrow \frac{2[E - V(\rho)]}{m} = \rho'^2 + \frac{L^2}{m^2\rho^2} \Rightarrow \rho' = \frac{d\rho}{dt} = \frac{2[E - V(\rho)]}{m} - \frac{L^2}{m^2\rho^2} \quad \text{---- (4)}$$

- وباستكمال (4) نحصل على قانون الحركة:

$$t + C_1 = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V) - \frac{L^2}{m^2\rho^2}}} \quad \text{---- (5)}$$

وهو قانون الحركة.

"②. ومن أجل الحالة الخاصة $V(\rho) = -\frac{\kappa}{\rho}$ ؛ الحركة في حقل نيوتوني مركزي، لدينا:

$$t + C_1 = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{\kappa}{r} - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right]}} = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}]}} \quad \text{---- (6)}$$

- حيث يُسمى V_{eff} بـ الكمون الفعّال، وهو يُعطى بالعلاقة:

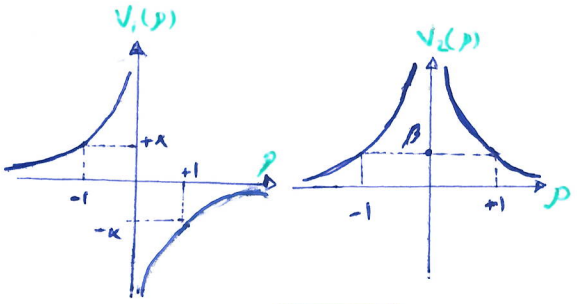
$$V_{eff} = \underbrace{-\frac{\alpha}{\rho}}_{V_1\ \text{جاذبي}} + \underbrace{\frac{L^2}{2m\rho^2}}_{V_2\ \text{نابذ}} \quad \text{..... (7)} \quad ; \beta = \frac{L^2}{2m} = ct$$

- حتى يكون لهذه الحركة معنى فإنه يجب أن يكون: $E > V_{eff}$ [أي الفرق الطاقوي بين E و V_{eff} يجب أن يكون موجباً].

ملاحظة:

- رياضياً تأخذ الكمونات $V_1(\rho)$ و $V_2(\rho)$ الأشكال التالية:

ولكن، ρ مقدار موجب دوماً حسب تعريفه، وبالتالي نقتصر على الفروع المقابلة لـ ρ الموجب.



الشكل ①

- وتأخذ العلاقة (7) مجراها الخط المتصل في الشكل ②.

- نوجد النقاط الحدية للكمون الفعال، كما يلي:

$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^2} \quad ; \beta = \frac{L^2}{2m} \quad \text{..... (7)'}$$

نجعل $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}(V_{eff}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow +\frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{2\beta}{\rho^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2}\left(\alpha - \frac{2\beta}{\rho}\right) = 0$$

إما $\rho = \pm\infty$ (مرفوض)

أو $\rho_{min} = \frac{2\beta}{\alpha}$ و $\alpha = \frac{2\beta}{\rho_{min}}$

لمعرفة طبيعة هذه النقاط نشتق مرة ثانية:

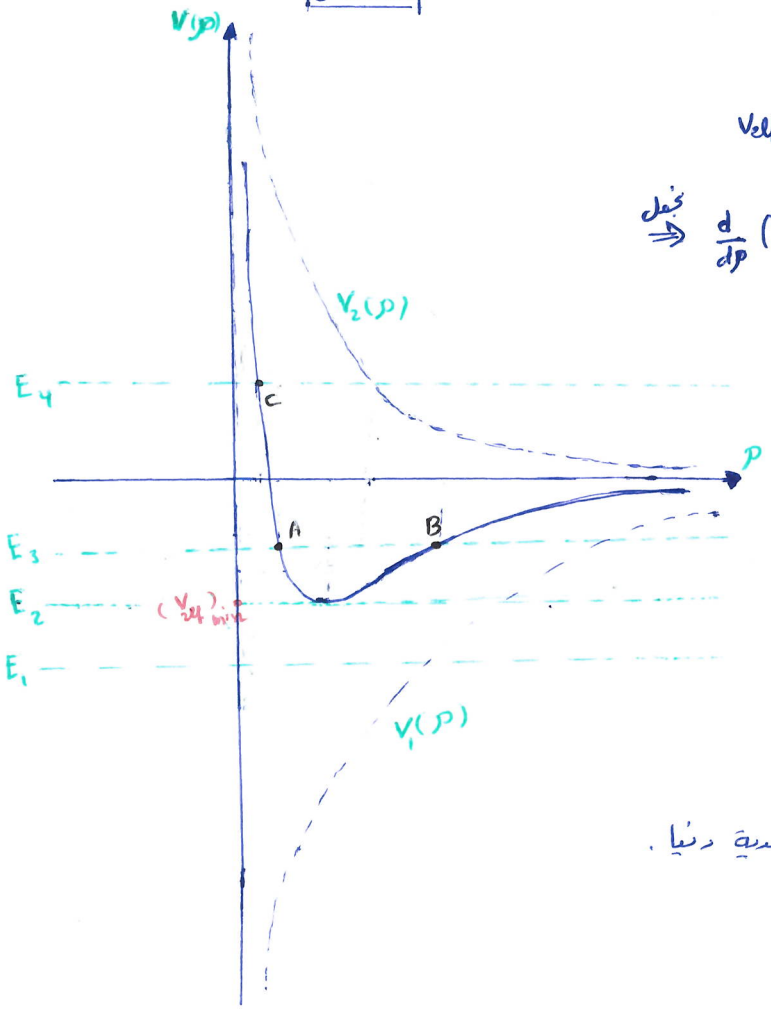
$$\frac{d^2}{d\rho^2}\left(-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho^2}\right)\Big|_{\rho_{min}} = \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(\alpha - \frac{2\beta}{\rho}\right)\right]\Big|_{\rho_{min}}$$

$$= \frac{2\beta}{\rho_{min}^4} > 0$$

$\Leftarrow$ النقاط الحدية عند ρ_{min} هي نقاط صدية دنيا.

وبالتعويض عن ρ_{min} بقيمتها في (7)' نجد:

$$(V_{eff})_{min} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho}\Big|_{\rho_{min}} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta} = -\frac{\alpha^2}{4\beta} = -\frac{\alpha}{2\rho_{min}} = \frac{\beta}{\rho_{min}^2} = -\frac{L^2}{2m\rho_{min}^2} \quad \text{..... (8)}$$



وبالتعويض في (2,21) نجد قيمة تابع الكمون الفعال عند نهايته الحدية الدنيا ($r = r_1$) :

$$(V_{eff})_{\min} = (V_{eff})_{r=r_1} = -\frac{L_o^2}{2mr_1^2} = -\frac{\alpha}{2r_1} < 0$$

A - المسار والسرعة عند $E_o = E_1 = (V_{eff})_{\min}$

نلاحظ بهذه الحالة من (2,20) أن $r' = 0 \Rightarrow r = cte$ أي أن نصف قطر المسار r مقدار ثابت (حالة دائرة)

ولمزيد من التأكد نجد بالتعويض في عبارة التباعد المركزي $e = \sqrt{1 + \frac{2E_o L_o^2}{m\alpha^2}}$

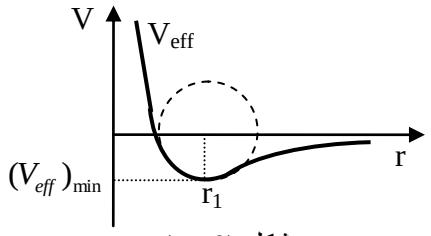
$$e = \sqrt{1 + \frac{2L_o^2}{m\alpha^2}(-\frac{\alpha}{2r_1})} = \sqrt{1 - \frac{L_o^2}{\alpha m r_1}} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha}} = 0$$

والشكل (2,10) يوضح المسار الدائري الحاصل .

يمكن حساب السرعة على المدار من معادلة الحركة (*) المعتمدة على ثبات العزم الحركي ،

حيث نأخذ بعين الاعتبار أن $\varphi' = \omega = \frac{\vartheta_1}{r_1}$

فنجد $\vartheta_1 = \frac{L_o}{mr_1} = cte$ بينما تشير (**) إلى ثبات r



شكل (2,10)

B - المسار والسرعة عند $E_o = E_2 < (V_{eff})_{\min}$

نلاحظ بهذه الحالة من (2,20) أن ماتحت الجذر يصبح سالباً ،

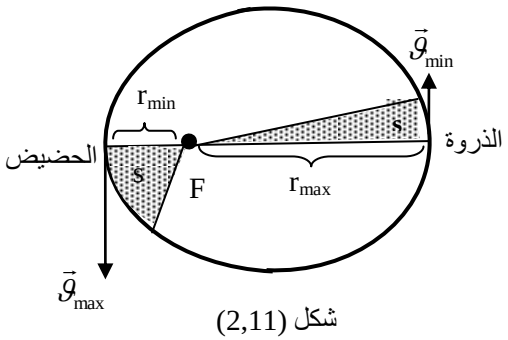
وبالتالي لاتشير معادلة الحركة لوجود حركة في هذا المجال الطاقي (لايتقاطع مستوي الطاقة مع منحني الكمون الفعال) كما هو موضح في الشكل (2,9) .

C - المسار والسرعة عند $(V_{eff})_{\min} < E_o = E_3 < 0$

نلاحظ بهذه الحالة من (2,20) أن ماتحت الجذر يصبح موجباً ، وهذا يعني وجود حركة نصف قطر مسارها متغير بمرور الزمن ($r \neq cte$) ، ونلاحظ من الشكل (2,9) تقاطع مستوي الطاقة E_3 مع الكمون الفعال V_{eff} في الموضعين الموافقين لـ r_2 و r_3 وبالتالي يكون المسار قطع مخروطي ناقص في المجال $r_2 < r < r_3$

ويُرسم المسار (الإهليلج) بحيث لايتعدى بعد ذروته r_{max} (أبعد نقطة منه عن المحرقF) القيمة r_3 ، ولايقل بعد حضيضه r_{min} (أقرب نقطة منه من المحرق F) عن القيمة r_2

كما هو موضح في الشكل (2,11) .



شكل (2,11)

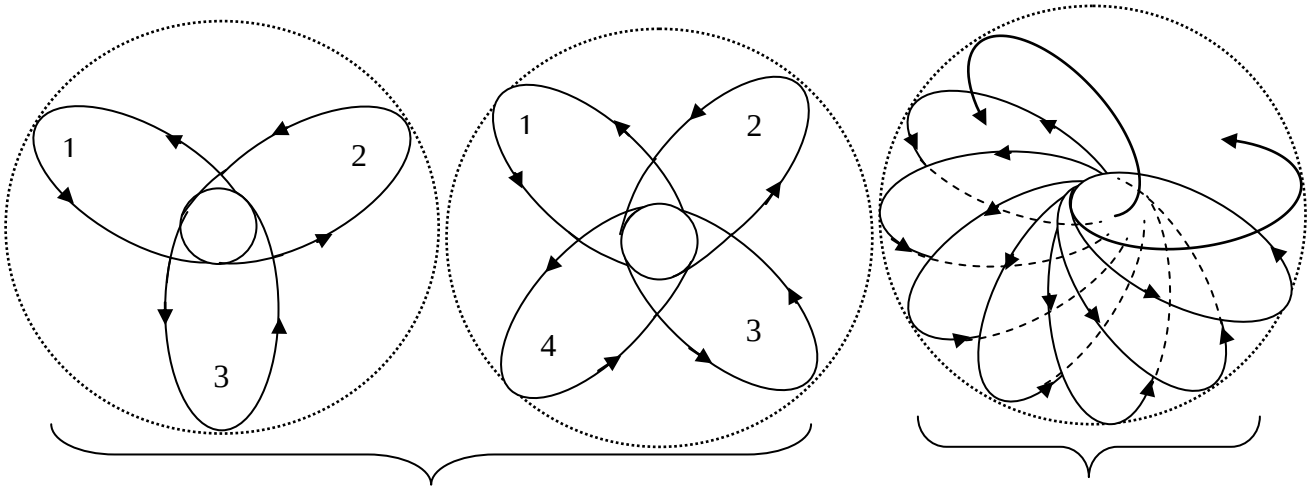
نلاحظ هنا تحقق قانون السطوح $r_{max}\vartheta_{min} = r_{min}\vartheta_{max}$

حيث تأخذ سرعة المتحرك قيمتها الدنيا $\vec{\vartheta}_{min}$ عند ذروة المسار

وتأخذ قيمتها القصوى $\vec{\vartheta}_{max}$ في الحضيض ، وتكون المساحات s التي يمسحها r خلال وحدة الزمن متساوية .

ونميز في هذه الحالة نوعين من المسارات :

- المسارات المغلقة : وهي نوعين
  - حالة مسار قطع مخروطي وحيد كما بالشكل (2,11) وهو ما تمت دراسته سابقاً .
  - حالة عدة مسارات مخروطية مغلقة كما بالشكل (2,12-a) . ويحدث الإغلاق هنا حين يعود المتحرك ليرسم المسارات ذاتها بعد مرور زمن يساوي عدد صحيح من الزمن الدوري للقطع الوحيد .
- المسارات المفتوحة : وهنا يقوم المتحرك برسم عدد لانهائي من المسارات القطعية دون أن يحدث إغلاق كما هو موضح بالشكل (2,12-b)



(a) (b)

شكل (2,12)

D - المسار والسرعة عندما $V_{eff} \geq 0$

نفرض r_4 نصف قطر المسار الموافق لحالة $V_{eff} = 0$ فنجد من (2,21)

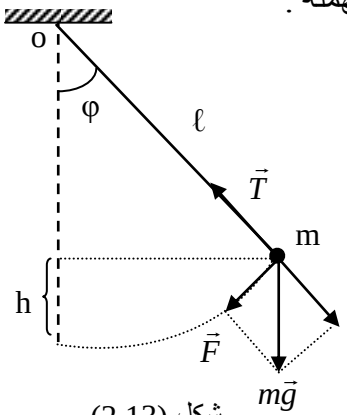
$$V_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L_o^2}{2mr^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_o^2}{2mr^2} \geq \frac{\alpha}{r} \quad \Rightarrow r \leq \frac{L_o^2}{2m\alpha} = \frac{\alpha r_1}{2\alpha} = \frac{r_1}{2} = r_4$$

وهذا موضح في الشكل (2,9) . ولإيجاد شكل المسار عند الطاقات $E_o \geq 0$ ، نلاحظ من (***) أنه :

- من أجل $E_o = 0$ يكون $e = 1$ والمسار بهذه الحالة قطع مكافئ .
- ومن أجل $E_o = E_4 > 0$ يكون $e > 1$ والمسار بهذه الحالة قطع زائد .

إذن في المجال $r \leq r_4$ فإن السرعة تبلغ قيمتها القصوى ϑ_{max} (في كلتا حالتي المسار المذكورتين) عندما يقع المتحرك في الذروة حيث يكون نصف قطر المسار أصغرياً r_{min} . عموماً يمكن إجمال ماسبق بحالة مرور سفينة فضائية أو مذنب بالقرب من كوكب أونجم جاذب (يتمتع بحقل قوة جذب مركزية) فيكتسب الجسم المتحرك طاقة حركية عالية تتجلى ببلوغه سرعة قصوى لحظة مروره بذروة المسار القطعي (نقطة حضيضه) ، فإذا كانت السرعة المكتسبة أقل من الحد الأدنى اللازم للإفلات من الحقل الجاذب يعود الجسم مرة ثانية متماً دورة كاملة وفق مسار قطع ناقص ، وإذا كانت السرعة المكتسبة أكبر أو تساوي الحد الأدنى اللازم للإفلات من الحقل الجاذب فإنه ينفلت كمقذوف فضائي (حالة تشتت) وفق مسار قطعي (مكافئ ،زائد) وسندرس مفصلاً هذه الحالة في فقرة لاحقة .

<u>تطبيق ٧ :</u> أوجد اعتماداً على قانون انحفاظ الطاقة معادلة حركة ودور اهتزاز نواس طوله ℓ وكتلته m ، علماً أن الخيط غير قابل للامتطاط ، والكتلة نقطية ، ومقاومة الهواء مهملة .



شكل (2,13)

<u>الحل</u> : نلاحظ من الشكل (2,13) أن الحركة مستوية ، وأن عزم محصلة قوى الإرجاع غير معدوم ، وبالتالي فالعزم الحركي غير محفوظ . أي :

$$\vec{\mu}_{\vec{F}} \neq 0 \Rightarrow \vec{L} \neq cte \qquad ; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu}_{\vec{F}}$$

بما أن الطاقة الكلية محفوظة يكون $E_o(t) = T + U = cte$ (*)

الطاقة الكامنة الثقالية $U = mgh = mg\ell(1-\cos\varphi)$

والطاقة الحركية (في القطبية) $T = \frac{1}{2}m\vartheta^2 = \frac{1}{2}m(r'^2 + r^2\varphi'^2)$

وبما أن $r \equiv \ell = cte \Rightarrow r' \equiv \ell' = 0$ إذن $T = \frac{1}{2}m\ell^2\varphi'^2$

وبالتعويض عن كل بقيمته في (*) نجد $E_o(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\varphi'^2 + mg\ell(1-\cos\varphi)$ (**)

واعتماداً على قانون انحفاظ الطاقة تكون الطاقة الكلية مقدار ثابت في كل لحظة زمنية من لحظات الحركة ، أي

$$E_o(t) = E_o(t=0) \qquad (***)$$

وبفرض أن لحظة البدء $t = 0$ هي اللحظة الموافقة لترك النواس يهتز دون سرعة ابتدائية وذلك بعد إزاحته بزاوية φ_o عن الشاقول ، فإن زوايا الميل التي يبلغها النواس عند الإزاحات القصوى التالية يجب أن تحقق المتراجحة

السألة الرابعة-④: يتحرك جسم كتلته m على مسار قطعي محروطي. والمطلوب:

"①. احسب القوة المسببة لهذا المسار، وماهو نوعها.

"②. احسب الطاقة الكلية للجسم في الحالات التالية للمسار القطعي (ناقص، مكافئ، زائد، دائرة)

الحل على المسألة ④:

"①. معادلة المسار القطعي: $r=\frac{p}{1+e\cos\phi}$ نقوم بالتبديل: $u=\frac{1}{r}$ & $u''_\phi=-\frac{e}{p}\cos\phi$

وعند قانون نيوتن الثاني: $F_r=-mc^2u^2(u''_\phi+u)$

بالتعويض: $F_r=-\frac{mc^2}{r^2}\left[-\frac{e}{p}\cos\phi+\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\phi\right]=-\frac{mc^2}{r^2p}=\frac{\mu m}{r^2}=G\frac{mM}{r^2}$; $\mu=GM=\frac{c^2}{p}$

بما أن القوة الفاعلة هي قوة جاذبية مركزية.

"②. $E=T+U=\frac{1}{2}mv^2+U$, $U=-\int\vec{F}d\vec{r}=\int F dr\cos\pi=\int\frac{\mu m}{r^2}dr=-\frac{\mu m}{r}$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{\mu m}{r}\quad(*)$$

وبما أن السرعة v هي التي تحدد نوع المسار، لذا نوجدها من قانون بينيه الأول: $v^2=c^2(u'^2_\phi+u^2)$

$$v^2=c^2\left(\frac{e^2}{p^2}\sin^2\phi+\frac{1}{p^2}+\frac{e^2}{p^2}\cos^2\phi+\frac{2e}{p^2}\cos\phi\right)\quad ;\quad u'_\phi=-\frac{e}{p}\sin\phi$$

$$v^2=\frac{c^2}{p^2}(1+e^2+2e\cos\phi)$$

نطرح ونضيف (e^2-1) مثلاً:

$$v^2=\frac{c^2}{p^2}((e^2-1)+2(1+e\cos\phi))$$

$$\Rightarrow v^2=\frac{c^2}{p}\left[\frac{(e^2-1)}{p}+2\frac{(1+e\cos\phi)}{p}\right]=\mu\left[\frac{(e^2-1)}{p}+\frac{2}{r}\right]$$

* نأخذ الطاقات بدلالة المسارات القطعية المختلفة وبالاستفادة من الخواص الخاصة بهذه المسارات:

قطع ناقص: $p=\frac{b^2}{a}=a(1-e^2)\Rightarrow e^2-1=-\frac{p}{a}\Rightarrow v^2=\mu\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]$

وبالتعويض في (*):

$$E=\frac{1}{2}m\mu\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]-\frac{\mu m}{r}=-\frac{\mu m}{2a}<0\Rightarrow$$ الطاقة الكلية سالبة

قطع مكافئ: $e=1\Rightarrow v^2=\frac{2\mu}{r}\Rightarrow E=\frac{m\mu}{r}-\frac{m\mu}{r}=0\Rightarrow$ الطاقة الكلية معدومة

قطع زائد: $p=\frac{b^2}{a}=a(e^2-1)\Rightarrow\frac{p}{a}=(e^2-1)\Rightarrow v^2=\mu\left[\frac{1}{a}+\frac{2}{r}\right]$

$$E=\frac{1}{2}m\mu\left[\frac{1}{a}+\frac{2}{r}\right]-\frac{\mu m}{r}=+\frac{\mu m}{2a}>0\Rightarrow$$ الطاقة الكلية موجبة

دائرة: $e=0$ و $p=a\Rightarrow v^2=\mu\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]$

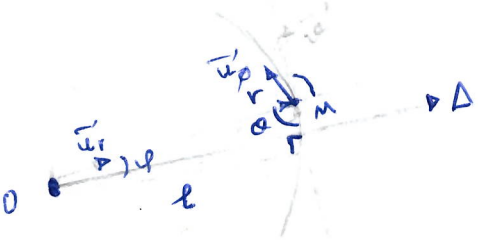
$$E=\frac{1}{2}m\mu\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right]-\frac{\mu m}{r}=-\frac{\mu m}{2a}<0$$ والطاقة الكلية سالبة.

يتحرك جسم في القطاع القطبي (r, φ) في حقل مركزي (O) بسرعة v يحقق قانون السطوح والمطلوب:

① ارسم جزء المسار في المستوي القطبي، وبرهن أن: $r^2\varphi' = \ell v = c = cte$ حيث: ℓ طول العمود النازل من (O) على المماس للمسار (المماس في نقطة تواجد الجسم على المسار)

② برهن صحة العلاقة التالية: $a_r = \frac{c^2}{\ell^3} \cdot \frac{d\ell}{dr}$ حيث: a_r مركبة التسارع على الشعاع $\vec{r}$.

الجواب على السؤال ③:



① نفرض أن S هو جزء المسار الواقع في المستوي القطبي $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ كما في الشكل.

لدينا: $\vec{r} = r\vec{u}_r$ و $\vec{v} = r'\vec{u}_r + r\varphi'\vec{u}_\varphi$

عليه: $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\left[r\vec{u}_r \times (r'\vec{u}_r + r\varphi'\vec{u}_\varphi)\right]$

$= mrr'(\vec{u}_r \times \vec{u}_r) + mr^2\varphi'(\vec{u}_r \times \vec{u}_\varphi) = mr^2\varphi'\vec{k}$ ①

($\vec{u}_r \times \vec{u}_r = 0$ و $\vec{u}_r \times \vec{u}_\varphi = \vec{k}$)

من الشكل نجد: $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = mrv\sin\alpha\,\vec{k} = mv\ell\vec{k}$ ②

من ① و ② نجد: $r^2\varphi' = \ell v = c = cte$; $|\vec{C}| = |2\vec{\sigma}| = C$ و $[C] = [\sigma] = \frac{m^2}{s}$

②

قانون بينه الأول: $v^2 = c^2u'^2_\varphi + c^2u^2$ و $\ell \cdot v = c \Rightarrow v = \frac{c}{\ell} \Rightarrow v^2 = \frac{c^2}{\ell^2} = c^2(u'^2_\varphi + u^2)$

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ φ: $\frac{-2\ell\frac{d\ell}{du}}{\ell^4} = 2u + 2u'_\varphi \frac{du'_\varphi}{du}$ (Ω)

$\Omega = \frac{du'_\varphi}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) = \frac{d^2u}{d\varphi} \cdot \frac{1}{du} = \frac{d^2u}{d\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{du} = u''_\varphi \cdot \frac{1}{\frac{du}{d\varphi}} = \frac{u''_\varphi}{u'_\varphi}$

وبالمعوض في الوسيط: $r = \frac{1}{u} \Rightarrow dr = -\frac{du}{u^2} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$

ونكتب: $\frac{-2\frac{d\ell}{dr} \cdot \frac{dr}{du}}{\ell^3} = 2u + 2u'_\varphi \cdot \frac{u''_\varphi}{u'_\varphi} \Rightarrow \frac{2}{\ell^3} \cdot \frac{d\ell}{dr} \cdot \frac{1}{u^2} = 2(u + u''_\varphi)$

نستنتج: $F = -ma_r = -mc^2u^2(u + u''_\varphi)$ ③ (شعاع القوة الجاذبة المركزية المحولة على r ومنه قانون بينه)

بالمقارنة نجد: $a_r = c^2u^2\left(\frac{1}{\ell^3} \cdot \frac{d\ell}{dr} \cdot \frac{1}{u^2}\right) = \frac{c^2}{\ell^3} \cdot \frac{d\ell}{dr}$ وهو المطلوب

مكتبة A to Z