كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : الثانية /نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التاريخ : 10/10/2024
المحاضرة الثانية ②

## الفصل الثاني ② : النظريات العامة في تحليل النقطة المادية -
## والثالث ③ : الحقل المركزي

من العلاقة ② نرى أن :
تغير كمية حركة النقطة المادية عند انتقالها على مسارها تحت تأثير القوة $\vec{F}$ ما هو إلا الوضع " $\vec{F}dt$ " الذي يقوم به القوة نفسها من خلال النقطة المادية.

ومن العلاقة ' ② نرى أن :
مستقة الاندفاع ما هي إلا القوة المؤثرة على النقطة المادية.

### ① . تمهيد :

- هل يمكن الوصول إلى قانون الحركة دون اللجوء إلى مسلمة نيوتن ؟

الجواب : نعم يمكن ذلك ، وذلك من طريق ما سيأتي في النظريات العامة في التحليل.

### ② . نظرية كمية الحركة :

- نعرف كمية الحركة (لنقطة مادية) بالعلاقة :

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad \text{.....} ①$$

حيث : $m\vec{v}$ سرعة وكتلة النقطة المادية.

- والآن ، بمفاضلة الطرفين ، نجد أن :

$$d\vec{P} = m\,d\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.dt = \vec{F}\,dt \quad \text{.....} ② \longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{.....} ②'$$

- وبالاستكمال بين الوضعين $M_0$ و $M$ حيث تغيرت كمية الحركة من $\vec{P_0}$ إلى $\vec{P}$ :

$$\vec{P} - \vec{P_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}.dt \quad \text{.....} ③$$

- ونفرض أن مركبات $\vec{F}$ على المحاور الديكارتية هي $X$ $Y$ $Z$ فإن مسقط المعادلة ③ على المحاور نفسها يكون بالشكل :

$$P_x - P_{0x} = \int_{t_0}^{t} X\,dt$$

$$P_y - P_{0y} = \int_{t_0}^{t} Y\,dt \quad \text{.....} ④$$

$$P_z - P_{0z} = \int_{t_0}^{t} Z\,dt$$

ومن الواضح ، أنه إذا علمت القوة $\vec{F}(X,Y,Z)$ بدلالة الزمن فيمكن حساب مساقط الاندفاع ، ومن ثم بالاستكمال سرعة ثانية نحصل على قانون الحركة.

- عموماً ، لنفرض أنه تمّ حساب التكامل في الطرف الأيمن كناتج ما يسمى بالسبة للزمن : $\vec{f}(t)$ ، أي حصلنا على العلاقة :

$$m\vec{v} = m\vec{v_0} + \vec{f}(t) - \vec{f}(t_0) \quad \text{.....} ⑤ \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v_0} + \frac{1}{m}\left[\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)\right]$$

وبالاستكمال نجد قانون الحركة التالي :

$$\vec{r} = \vec{v_0}\,t + \frac{1}{m}\vec{f}(t_0)\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \quad \text{.....} ⑥$$

### الخلاصة :

يمكن الوصول إلى قانون الحركة انطلاقاً من العلاقة ③ وذلك إذا علمنا القوة بدلالة الزمن وذلك كي نتمكن من حساب التكامل الموجود في الطرف الأيمن منها.

## ③. نظرية الطاقة الحركية :

- نعرّف الطاقة الحركية $T$ لنقطة مادية متحركة بالعلاقة : $T = \frac{1}{2} m v^2$ ... (7)

- وبمفاضلة الطرفين، نجد أنّ :

$$dT = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot dt = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \quad ; \quad \vec{v}dt = d\vec{r} \Rightarrow dT = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad ... (8)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad ..... (9)$$

- من العلاقة (8) نرى أنّ : تغيّر الطاقة الحركية لنقطة مادية عند انتقالها على مسارها أخذ تأثير القوة $\vec{F}$ سيساوي العمل المنجز انتقالاً عنصرياً مقداره $d\vec{r}$ الذي تجريه القوة $\vec{F}$ لفعلها من خلال النقطة المادية.

- ومن العلاقة (9) نرى أنّ : سنعتبر الطاقة الحركية ساهمي إذا كانت الاستطاعة .

- وبالتكامل العلاقة (8) بين النقطتين $M_0$ و $M$ حيث الطاقة الحركية من $T_0$ إلى $T$ :

$$T - T_0 = \int_{M_0}^{M} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \quad ..... (10)$$

إذن : إذا كانت القوة بدلالة الإحداثيات نؤول المسألة إلى حساب تكامل على منحنى المسار، وبالنتيجة نحصل على الطاقة الحركية بدلالة الإحداثيات، وفي الحالة الخاصة (الحركة في بعد واحد) فإننا نجد بالاستكمال صورة "المنزل" لقانون الحركة.

## ④. القوى الانحفاظية :

- تسمى أيضاً بـ القوى المحافظة وهي بالتعريف : القوى التي لا يتوقف عملها على الطريق المسلوك وإنما فقط على الوضع البدائي والنهائي للنقطة المتحركة.

- ويمكن تصنيفها إلى مركزية ولامركزية.

- المركزية [مثل قوى : الثقالة - التجاذب (التناضح) - المرونة]

- اللامركزية [مثل قوى : لابلاس الكهربائية - كوريوليس] .

**ملاحظة * :** إنّ لاختيار المحاور الإحداثية أهمية كبيرة في تسهيل حساب العمل ؛ فلو تمّ اختيار الإحداثيات الكروية $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ غير معتمدة لكانت الثقل ثلاثة مساعيها وحتى هذه الثلاثة.

## ⑤. عمل قوى الثقالة :

من أجل نقطة مادية كتلتها $m$ تتسارع تحت تأثير ثقلها $\vec{F}$ فإنّ : العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ وبكارتياً يعطى بالعلاقة :

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \quad ; \quad \vec{F} = -mg\,\vec{e_z} \quad ..... (11)$$

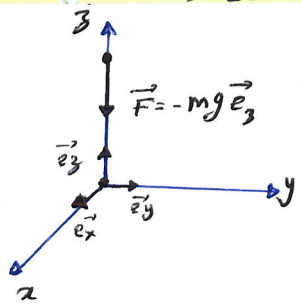
وملاحظة أنّ : $F_x = F_y = 0$ & $F_z = -mg \Rightarrow dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -mg\,dz$

وبالمكاملة بين الوضعين $M_1$ و $M_2$ نجد :

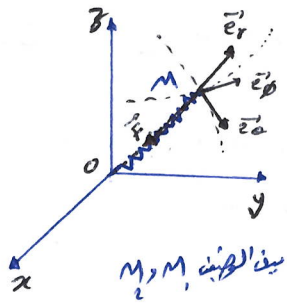
$$A_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} F_z\,dz = -\int_{z_1}^{z_2} mg\,dz = \int_{z_2}^{z_1} mg\,dz = mg(z_1 - z_2) \quad ... (12)$$

إذن : كما نلاحظ العمل لا يتعلق بالطريق الذي سلكته النقطة المادية وإنما بالوضعين البدائي والنهائي لها.

وهذا يعني أنّه : « إذا انتقلت النقطة المادية تحت تأثير الثقالة من سوية أولى راسمها $z_1$ إلى أخرى راسمها $z_2$ فإنّ عمل قوى الثقالة لا يتغير سواء سقطت النقطة سقوطاً حراً أو على مسير مائل أو ضمن النفق دون اعتبار أي وسيلة أخرى ».



ب). عمل قوى المرونة : من أجل جسيمة صغيرة (نعتبرها نقطة مادية) ، مربوطة بنابض نهايته الثانية مربوطة عند الأصليات ، فإن العمل الأولي من القوة $\vec{F}$ كرونا العنصري يعطى بالعلاقة :




$$dA = \vec{F}.d\vec{r} = F_r dr + F_\theta d\theta + F_\varphi d\varphi \quad ; \quad F_r = -K\,\overline{OM} = -kr = -K.r\vec{e_r} \quad \text{---(13)}$$

وكما نلاحظ : $F_\theta = F_\varphi = 0$ & $F_r = -Kr$

بالمكاملة بين الوضعين $M_1, M_2$ $\Rightarrow$

$$A_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} F_r dr = -\int_{r_1}^{r_2} kr\,dr = \int_{r_2}^{r_1} kr\,dr = \frac{K}{2}(r_1^2 - r_2^2) \quad \text{---(14)}$$

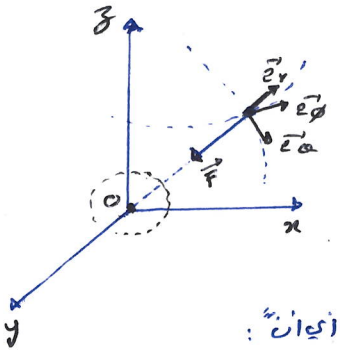
ج). عمل قوى التجاذب (التدافع) :

- سواء كانت كهربائية أو متعلقة إلى قوى التجاذب العالمي فإن هذه القوى تتناسب عكساً مع مربع البعد ، أي هذه القوى لها الشكل :

$$|F| = \frac{K}{r^2} \quad \text{---(15)}$$

حيث :

K ثابت يتعلق بنوع القوى.




① . فإذا كانت القوة كهربائية ، فإن هذا الثابت يتعلق بالشحنتين الكهربائيتين والثابت k ، أي أن :

$$|F| = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

② . وإذا كانت القوة عبارة عن قوة تجاذب عالمي فإن الثابت يتعلق بالكتل المتجاذبة ، التي تعتبر نقطية ، وثابت التجاذب العالمي f ، أي أن :

$$|F| = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

قوة جذب : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ ---(16)

قوة تدافع : $\vec{F} = +\frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ ---(16)'

وكما نلاحظ من أجل قوة التجاذب : $F_\theta = F_\varphi = 0$ & $F_r = -\frac{K}{r^2}$

وبالمكاملة :

$$A_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} F_r dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{K}{r_2} - \frac{K}{r_1} \quad \text{---(17)}$$

- وبنفس الطريقة نجد أن قوة التدافع علاقة مشابهة للعلاقة (17) مع تغيير إشارة حديها من أجل

- وبالتالي فإن قوى التجاذب أو التدافع قوى ... كمونية.

⑤ . تابع الكمون - تكامل الطاقة :

- نفرض تابعاً $V = V(x,y,z)$ نمنيه كيف يعطى العمل دوماً.

ا). من أجل عمل قوى الثقالة :

نضع : $V(x,y,z) = V(z) = mgz \overset{(12)}{\Rightarrow} A_{M_1}^{M_2} = mgz_1 - mgz_2 = V_1 - V_2$ ---(18)

ب). من أجل عمل قوى المرونة :

نضع : $V(x,y,z) = \frac{K}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{K}{2}r^2 \overset{(14)}{\Rightarrow} A_{M_1}^{M_2} = \frac{K}{2}(r_1^2 - r_2^2) = V_1 - V_2$ ---(19)

ج). من أجل عمل قوى التجاذب :

نضع : $V(x,y,z) = -\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{K}{r} \overset{(17)}{\Rightarrow} A_{M_1}^{M_2} = -\frac{K}{r_1} + \frac{K}{r_2} = V_1 - V_2$ ---(20)

- وهكذا يمكن التعميم على أي قوة كمونية.

أي أن: عنصر العمل المنجز بواسطة القوة $\vec{F}$ لنقل النقطة المادية بمقدار $d\vec{r}$ يساوي تناقص كمون النقطة المادية.

$$dA = \vec{F}.d\vec{r} = -dV \quad \text{------ (21)}$$

ملاحظة *: عندما تتألف القوة المؤثرة في النقطة المادية من قسمين كموني $\vec{F}$ وغير كموني $\vec{F'}$ فإن تكامل الطاقة (23) لا يكون محققاً لأن العمل العنصري يساوي، عندئذ:

$$dA + dA'$$

حيث dA العمل العنصري للقوى الكمونية، و dA' العمل العنصري للقوى غير الكمونية. وتكتب العلاقة (22) عندئذ:

$$dT = dA + dA' = \vec{F}.d\vec{r} + \vec{F'}.d\vec{r}$$

- والآن بالتعويض عن ذلك في العلاقة (8) نجد أن:

$$\text{------ (22)} \Rightarrow d(T+V) = 0 \Rightarrow T+V = E \quad \text{----- (23)}$$

تسمى العلاقة (23) بـ تكامل الطاقة، والشرط الوحيد لاستخدامها هو أن:

ملاحظة:

- عندما يكون عمل القوى الكمونية معدوم ($A_{M_1}^{M_2} = 0$)، مهما كانت انطباق النقطتان $M_2$ و $M_1$ والمسار يكون في هذه الحالة عبارة عن منحنى مغلق.

## (6) العلاقة بين القوة وتابع الكمون:

- لدينا:

$$dV = -\vec{F}.d\vec{r} = -F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz \quad \text{------ (24)}$$

- ومن جهة أخرى، إذا اعتبرنا تفاضل الكمون باعتباره لا يحوي الزمن بشكل صريح، فإننا نجد:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \quad \text{------ (25)}$$

- وبمقارنة العلاقتين (24) و (25) نجد أن:

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \;;\; F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \;;\; F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \quad \text{------ (26)}$$

الديكارتية:

- وباستثقاق العلاقتين الأولى والثانية من (26) بالنسبة لـ y و x على الترتيب، نجد:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \& \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

ولما كان التابع $V(x,y,z)$ وحيد القيمة ومستمر وقابلاً للاستثقاق، فإن: $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$، وبالتالي:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \quad \text{------ (27)}$$

وبنفس الطريقة نحصل على علاقتين مشابهتين:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \quad \text{------ (28)}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad \text{------ (29)}$$

- نستنتج من العلاقات (28) و (29) أنّ:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \quad \text{..... (30)}$$

وهذا يعني أنّ: القوة $\vec{F}$ لابدّ أنّ تكون تدرجاً لتابع ما. وبالفعل نلاحظ من العلاقة (26) أنّ:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

وهكذا نرى أنّه: من السهل الحصول على القوة الكمونية إذا علمنا تابع الكمون.

- ومن أجل الإحداثيات الأسطوانية والكروية، نكتب:

الأسطوانية

$$-V = V(\rho, \phi, z) \Rightarrow \boxed{F_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \;;\; F_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} \;;\; F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \quad \text{..... (31)}$$

الكروية

$$-V = V(r, \theta, \phi) \Rightarrow \boxed{F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \;;\; F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \;;\; F_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}} \quad \text{..... (32)}$$

ملاحظة (2)

عندما يكون $V$ تابعاً صريحاً للزمن فلا يمكن أنّ تكون القوة التي تشتق منه كمونية، ولا تكون الطاقة الحركية للمتحرك ثابتة «وطبعي ذلك؟؟»

ملاحظة (3)

من المفيد اختيار محاور إحداثية مناسبة عند حساب تابع الكمون، إذ:

① فإذا كانت القوة ذات اتجاه واحد [مثل قوة الثقالة] فإنه يفضل اختيار حملة المحاور الديكارتية.

② أمّا إذا كانت القوة متمركزة من نقطة ثابتة (مركزية) فإنه يفضل اختيار المحاور $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r)$.

(7) الاستفادة من تكامل الطاقة في إيجاد قانون الحركة:

- تعتبر العلاقة (23) ذات فائدة كبيرة في الحصول على قانون الحركة وبكامنية في حال كانت للنقطة المادية وسيط مقطع.

- نفرض أنّ حركة نقطة تحدث وفق المحور $ox$، ونكتب تكامل الطاقة بالشكل:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \quad \text{..... (33)} \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}$$

وبالاستكمال نحصل مباشرة على قانون الحركة:

$$t + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} \quad \text{..... (34)}$$

ولكي يكون للحركة معنى لابدّ أنّ يكون المقدار المجذور موجباً (أي يجب أن يكون $E > V(x)$)

- ونفرض أنّ الكمون الذي تخضع له النقطة كمون مرونة من الشكل: $V(x) = \frac{mw^2x^2}{2}$، عندئذٍ

بالتعويض في (34) نجد أنّ:

$$t + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{mw^2x^2}{2}\right]}}$$

وبإجراء التكامل في العلاقة نحصل أخيراً على قانون الحركة:

$$x = A\sin(wt + \phi) \quad \text{..... (35)}$$

وهو قانون الحركة الجيبي ضمن كمون المرونة.

## (8) نظرية العزم الحركي ، السرعة السطحية :

- يعرف العزم الحركي حول مركز الإحداثيات O ، لنقطة مادية كتلتها m وسرعتها $\vec{v}$ بالعلاقة :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \cdots\cdots (36)$$

- وباستقاق العزم الحركي بالنسبة للزمن نجد :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0 \quad \cdots\cdots (37)$$

حيث $\vec{M}_0$ عزم محصلة القوى الخارجية $\vec{F}$ المؤثرة بالنقطة المادية المدروسة وذلك بالنسبة لمركز الإحداثيات O .

وهكذا يمكن صياغة نتيجة هامة في الميكانيك :

« مشتق العزم الحركي لنقطة مادية ، بالنسبة للزمن ، يساوي عزم محصلة القوى المؤثرة على هذه النقطة وذلك بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O »

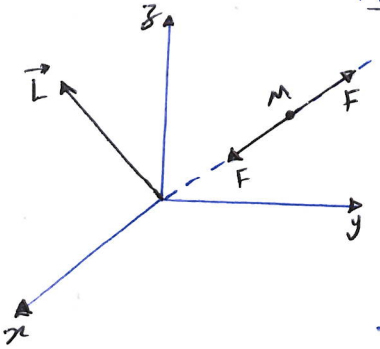
- لندرس الحالة الخاصة والتي من أجلها يكون ( $\vec{M}_0 = 0$ وعندئذ $\vec{L} = const$ ) :

وهنا نميز ثلاثة حالات :

أ) $\vec{r} = \vec{0}$ : وهذا يعني أن النقطة المادية تقع دوماً في مركز الإحداثيات ، وهي ساكنة هناك ، وهذه حالة خاصة لا تستحق الاهتمام .

ب) $\vec{F} = \vec{0}$ : أي أن محصلة القوى المؤثرة معدومة ؛ وهذا يعني طبقاً لمبدأ نيوتن الأول إما ساكنة أو تتحرك حركة مستقيمة منتظمة ، وهي حالة خاصة أيضاً غير ذات أهمية .

ج) $\vec{r} // \vec{F}$ : وهكذا كان $\vec{r}$ هو متجه الموضع الواصل بين مبدأ الإحداثيات O وموضع النقطة المدروسة M و $\vec{F}$ تؤثر بالنقطة المادية في الموضع M فإنه عندئذ لابد أن يكون لـ $\vec{r}$ و $\vec{F}$ نفس الحامل والقوة ستمر من O ، ونقول أن هذه القوة مركزية .




أما عن النقطة المادية فإننا نقول أنها تتحرك في حقل قوة مركزية .

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \cdots\cdots (38)$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على تكامل العزم الحركي :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{L}_0 = const \quad \cdots\cdots (39)$$

وبالنظر للعلاقة (39) وطبقاً لخواص الجداء الشعاعي :

عبارة « يجب أن يبقى $\vec{r}$ دوماً في مستوى أحدهما ثابت وهو $\vec{L}_0$ ، والحركة ستكون مستوية وتتم في المستوي $\Pi$ » (ثابت) (ثابت)

- لنعبر عن معادلة المستوى $\Pi$ الديكارتية :

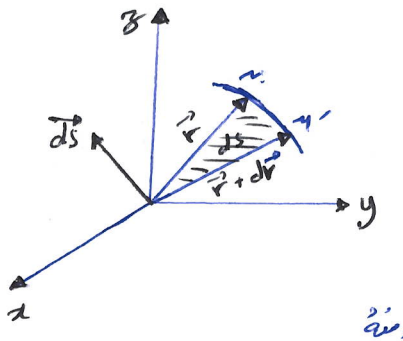
نفرض أن $\vec{r}(x,y,z) \equiv M(x,y,z)$ نقطة من هذا المستوى ، ومن ثم نضرب عددياً طرفي (39) بـ $\vec{r}$ فنجد :

$$\vec{L}\cdot\vec{r} = (\vec{r} \times m\vec{v})\cdot\vec{r} = \vec{L}_0 \cdot \vec{r} = 0 \quad ; \quad \vec{L}_0 \perp \vec{r} \Rightarrow L_{0x}\cdot x + L_{0y}\cdot y + L_{0z}\cdot z = 0 \quad \cdots\cdots (40)$$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى غير هذا المركز ويتعامد مع المتجه $\vec{L}_0$ ، وسمي هذا المستوى بالمستوي الإهليلجي .

ملاحظة ⑥ :

لما كانت الكواكب السيارة التي تتحرك حول الشمس والأقمار الصناعية التي تتحرك حول الأرض تخضع لقوى مركزية تعرف بأنها قوى الجذب [ مركز الشمس أو مركز الأرض ] فإن الحركات المذكورة ستكون مستوية دوماً ، ويكفي مرسيطان ( y,x ) أو ( ρ,φ ) أو ( r,θ ) لدراسة مثل هذه الحركات .




☒ تعريف السرعة السطحية :

- تعرف السرعة السطحية بأنها السطح الذي يرسمه متجه الموضع $\vec{r}$ خلال وحدة الزمن.

- من الشكل ⑥ وعن طواعين الجداء الخارجي :

$$|d\vec{s}| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times(\vec{r}+d\vec{r})\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times d\vec{r}\right| \quad \text{---- (41)}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| \quad \text{------ (42)}$$

وحدة $\frac{ds}{dt}$ وبالتالي

حيث اعتبرنا أن $d\vec{s}$ هو متجه عمودي على السطح طوله يساوي مساحة السطح فإن $\frac{d\vec{s}}{dt}$ هو متجه أيضاً نسميه بمتجه السرعة السطحية ونرمز له بالرمز $\vec{\sigma}$ . وعندئذ تكون العلاقة بين $\vec{L}$ و $\vec{\sigma}$ بالشكل :

$$\vec{L} = 2m\vec{\sigma} \quad \text{------ (43)}$$

- إذن الحركة في حقل مركزي تكون مستوية و خاصة لقانون السطوح : المساحات المسوحة بواسطة نصف القطر الشعاعي خلال أزمنة متساوية تكون متساوية وذلك لأن ثبات $\vec{L}$ يعني ثبات $\vec{\sigma}$

☒ حساب مساقط $\vec{L}$ (وبالتالي $\vec{\sigma}$) في الجمل الإحداثية المختلفة :

Ⓐ في جملة الإحداثيات الديكارتية :

نفرض أن مستوى الحركة هو $\Pi(x,y)$ وعن $\Pi_0$ لأن $(L_{oy}=L_{ox}=0)$ وعليه $\vec{L}\perp\Pi_0$

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix} \quad ; z=0 \text{ و } \dot{z}=0$$

$$= 0\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + m(x\dot{y}-y\dot{x})\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = m(x\dot{y}-y\dot{x})\vec{e}_z = L_z\vec{e}_z \quad \text{------ (44)}$$

Ⓑ في جملة الإحداثيات الأسطوانية :

- لدينا متجهي السرعة والموضع في الأسطوانية :

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \quad \text{و} \quad \vec{v} = \rho'\vec{e}_r + \rho\varphi'\vec{e}_\varphi + z'\vec{e}_z$$

- نفرض أن مستوى الحركة هو المستوى القطبي $\Pi(\rho,\varphi)$ وعندئذ $\vec{L}\perp\Pi_0$

ولدينا $z=z'=0$ . ونكتب :

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \rho & \varphi & z\\ \rho' & \rho\varphi' & z'\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \rho & 0 & 0\\ \rho' & \rho\varphi' & 0\end{vmatrix} = m\rho^2\varphi'\vec{e}_z = L_z\vec{e}_z \quad \text{------ (45)}$$

ج) في حالة الإحداثيات الكروية :

- لدينا متجهي الوضع والتسارع في الكروية ، بالشكل :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad \& \quad \vec{a} = r''\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\phi'\vec{e}_\phi$$

- نفرض أن مستوى الحركة هو مستوى زاوية الاستقطاب في الإحداثيات الكروية $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\Pi(r,\phi)$ فيكون $\theta' = 0$

ونكتب بناءً على ذلك :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{a} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \\ r & 0 & 0 \\ r' & 0 & r\phi' \end{vmatrix} = 0\,\vec{e}_r - mr^2\phi'\vec{e}_\theta + 0\,\vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{L} = -mr^2\phi'\vec{e}_\theta = -L_z\vec{e}_\theta \quad (46)$$

ملاحظة (5) :

إذا" في المستوى القطبي يكون :

$$\vec{L} = \vec{L}_z = m\,\phi'\vec{e}_z \quad \& \quad \vec{L} = 2m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\rho^2\phi'}{2}\vec{e}_z = \vec{C}_1 \Rightarrow \boxed{\rho^2\phi' = 2C_1 = C} \quad (47) \Rightarrow \boxed{\rho_1^2\phi_1' = \rho_2^2\phi_2'} \quad (47)' \; ; \; \phi' = w = \frac{v_\theta}{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 v_{\theta_1} = \rho_2 v_{\theta_2}} \quad (47)''$$

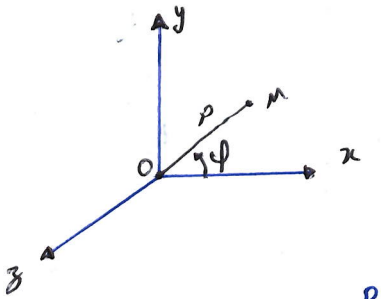
العلاقات من (47) ، (47)' ، (47)'' تعبر عن قانون السطوح رياضياً في المستوى القطبي .

(6) قانونا بينيه :

☒ قانون بينيه الأول :

- يعطى هذا القانون سرعة المتحرك عند معرفة معادلة المسار $u = u(\phi)$ :

- نفرض أن الحركة تحدث في المستوى القطبي $\Pi_0(\rho,\phi)$ عندئذٍ نكتب :




$$\vec{v} = \rho'\vec{e}_\rho + \rho\phi'\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z \quad ; \quad z = cte \Rightarrow \dot{z} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \rho'\vec{e}_\rho + \rho\phi'\vec{e}_\phi \Rightarrow v^2 = \rho'^2 + \rho^2\phi'^2 \quad (48)$$

ومن قانون السطوح : $\rho^2\phi' = C \Rightarrow \phi' = \frac{C}{\rho^2}$ (49) $\Rightarrow v^2 = \rho'^2 + \frac{C^2}{\rho^2}$ (50)

- وحيث أن :

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{C}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\phi} = -C\frac{d(\frac{1}{\rho})}{d\phi} = -C\frac{du}{d\phi} = -Cu'_\phi \; ; \; u = \frac{1}{\rho}$$

- بالتعويض عن ذلك في (50) نجد أن

$$v^2 = C^2u'^2_\phi + C^2u^2 \Rightarrow \boxed{v^2 = C^2(u'^2_\phi + u^2)} \quad (51)$$

☒ قانون بينيه الثاني :

- يعطى هذا القانون القوة عند معرفة معادلة المسار $u = u(\phi)$ :

- الحركة تحدث في المستوى القطبي $\Pi(\rho,\phi)$ ، ونكتب عندئذٍ :

$$\vec{a} = (\rho'' - \rho\phi'^2)\vec{e}_\rho + (\rho\phi'' + 2\rho'\phi')\vec{e}_\phi \quad ; \quad z = z' = 0$$

- وبما أن المسار مركزي فيكون $a_\phi = 0$ ، وعليه :

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\rho = (\rho'' - \rho\phi'^2)\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_\rho = m(\rho'' - \rho\phi'^2)\vec{e}_\rho \quad \text{.....(52)}$$

وحسب قانون المساحات : $\rho^2\phi' = c \Rightarrow \phi' = \frac{c}{\rho^2} \Rightarrow \phi'^2 = \frac{c^2}{\rho^4} \xrightarrow{(52)} F_\rho = m(\rho'' - \frac{c^2}{\rho^3}) \quad \text{.....(53)}$

- وحسب أنّ :

$$\rho'' = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\phi} = -c\frac{d(\frac{1}{\rho})}{d\phi} = -cu'_\phi \quad ; \quad u = \frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho'' = \frac{d\rho'}{dt} = \frac{d\rho'}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = -\frac{c^2}{\rho^2}\cdot\frac{d^2(\frac{1}{\rho})}{d\phi^2} = -c^2u^2u''^2_\phi \quad \text{.....(54)}$$

وبتعويض النتائج الأخيرة في (53) نجد أنّ :

$$F_\rho = m(-c^2u^2u''^2_\phi - c^2u^3) \Rightarrow F_\rho = -mc^2u^2(u''^2_\phi + u) \quad \text{.....(55)}$$

وهو قانون بينة « المسألة المباشرة »

(19) . قانون الجاذب العالمي :

- وجد كبلر أنّ مسارات الكواكب السيارة حول الشمس عبارة عن قطوع ناقصة تقع الشمس في أحد محرقيها « قانون كبلر الثاني »

- نعطى معادلة المسار القطبية بالشكل :

$$\rho = \frac{P}{1+e\cos\phi} \quad \text{.....(56)}$$

P : وسيط القطع ، e : تباعدة المركز ، و

لدينا الوسيط u بالشكل :

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{P} + \frac{e}{P}\cos\phi \Rightarrow F_\rho = -mc^2u^2(-\frac{e}{P}\cos\phi + \frac{1}{P} + \frac{e}{P}\cos\phi) = -\frac{mc^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{P} \quad \text{.....(57)}$$

$$\Rightarrow F_\rho = -\frac{\mu m}{\rho^2} \quad ; \quad \mu = \frac{c^2}{P} \quad \text{.....(58)}$$

حيث μ الثابت μ هو ثابت يتعلق بالجسم المولد للقوة « وهنا : الشمس » .

- وعندما نحسب القوة التي يؤثر بها الكوكب في الشمس « بالطريقة نفسها » ، نجد حسب الفعل ورد الفعل « الشمس ستتأثر بقوة جذب $F'_\rho$ تساوي القوة (58) وتعاكسها بالإشارة :

$$F'_\rho = \frac{\lambda M}{\rho^2} \quad \text{.....(59)}$$

حيث λ ثابت يتعلق بالكوكب ، M كتلة الشمس .

$$\Rightarrow \frac{\mu m}{\rho^2} = \frac{\lambda M}{\rho^2} \Rightarrow \frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} \quad \text{.....(60)}$$

- وسهل تعميم العلاقة (60) الأخيرة على أي كوكب آخر في المجموعة الشمسية كتلته m' وثابته λ' بالشكل :

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda'}{m'} = \text{.....} = f \quad \text{.....(61)}$$

حيث : f هو ثابت التجاذب العالمي .

- وحساب μ من (61) نحصل على قانون التجاذب العالمي بالشكل :

$$|F| = f\frac{mM}{\rho^2} \quad \text{.....(62)}$$

وهذا يعني أنّ : « كل جسمين ماديين يتفاعلان « يتبادلان التأثير » بقوة تتناسب طردا مع كتلتيهما وعكسا مع مربع البعد بينهما » . وهذا ينطبق على مختلف الأجسام من الجزيئات إلى الكواكب .

ملاحظة (6) :

- القوة F تكون ذات أهمية كبيرة عندما تكون كتلة الأجسام كبيرة ، كما هو الحال عند دراسة الميكانيك السماوي ، حيث تبلغ كتلة الأجسام حدا "كبيرا" جدا" .

- ويبدو أنّ القانون (62) ينطبق أيضا" على الجزيئات ذات الكتل الهائلة .

- قد تبلغ قوى التجاذب (62) حداً "هائلاً" في ما يسمى بـ النجوم القزمة: التي يتقلص حجمها وبالتالي تزداد قوى التجاذب بشكل هائل على سطحها لدرجة يجذب كل منا جزيئاته منها ما فيها الإشعاعات الكونية والفوتونات الضوئية وغيرها. وكذلك ذات الأمر للثقوب السوداء فلها جاذبية قوية جداً".

ملاحظة (7):

والآن إذا حسبنا قوى التجاذب والكهربائي بين إلكترون و بروتون $F_e$ وقارناها بـ قوة التجاذب النيوتني $F_g$ بينهما، فإننا نجد:

$$F_e = 10^{40} F_g \quad \text{..... (63)}$$

وكما نلاحظ من العلاقة الأخيرة فإن: قوى التجاذب التي نتحدث عنها أصغر بكثير من قوى التجاذب الكهربائي لدرجة تهمل تماماً أمامها.

س: احسب قيمة التجاذب العالمي $f$؟

ج: - نضع جسم كتلته $m$ على سطح الأرض فإن الأرض ستقوم بجذبه بقوة: $F=mg$

- وهناك قوة ثانية هذا الجسم ستتأثر بقوة تجاذب عالمي من مركز الأرض التي كتلتها $M$ بالشكل: $f\frac{Mm}{R^2}$

حيث: $R$ نصف قطر الأرض، وبالتالي نحصل على العلاقة:

$$f\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow f = \frac{R^2 g}{M} \quad \text{..... (64)}$$

- وبالأخذ بعين الاعتبار أن الأرض عبارة عن كرة نصف قطرها $R$، وكثافتها $\delta$، فإن حجمها $\frac{4}{3}\pi R^3$

وعليه كتلتها: $m = \frac{4}{3}\pi \delta R^3$، وبالتعويض نجد:

$$f = \frac{3g}{4\pi \delta R} \quad \text{..... (65)}$$

- وإذا علمنا أن نصف القطر يبلغ حوالي: $6400 \times 10^5$ cm وأن التسارع الأرضي: $980\ cm/s^2$ على سطحها و

كثافتها: $\delta = 5\ gr/cm^3$، فإننا نجد بالتعويض في (65) أن:

$$f = 6,67 \times 10^{-11}\ kg^{-1}.m^3.sec^{-2} = 6,67 \times 10^{-8}\ gr^{-1}.cm^3.sec^{-2}$$

(11) دراسة المسألة العكسية «إيجاد معادلة المسار، إذا علمت القوة»:

سؤال: هل يمكن البرهان أن مسار نقطة مادية تتحرك في حقل قوى من النوع (62) عبارة عن قطع زائد؟

- لدينا قانون بينيه الثاني بالشكل:

$$F_p = -\frac{\mu m}{\rho^2} = \frac{m c^2}{\rho^2}(u''+u) \Rightarrow u''+u = \frac{\mu}{c^2} \quad \text{..... (66)}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة مع طرف ثان، وحلها بالشكل:

$$u = \frac{1}{\rho} = A\cos(\theta+\kappa) + \frac{\mu}{c^2} \quad \text{..... (67)}$$

- نفرض ثابتين جديدين، هما:

$$A = \frac{e}{p} \text{ و } \frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p} \xrightarrow{(67)} \frac{1}{u} = \rho = \frac{p}{1+e\cos(\theta+\kappa)} \quad \text{..... (68)}$$

وهي المعادلة العامة للقطوع، ويختلف نوع القطع باختلاف الثابت $e$ (الذي يتعلق بـ $A$). فإذا كان:

$e>1$ ⟸ المسار قطع زائد

$e=1$ ⟸ المسار قطع مكافئ

$e<1$ ⟸ المسار قطع ناقص.

مكتبة A to Z