كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك فيزيائي٢

المحاضرة : الاولى /نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

3/10/2024 ت:

مقرر: ميكانيك عيزياوي - ②

المحاضرة ① - نظري

الفصل الأول ①: جمل الإحداثيات المختلفة لمبارك نيوتن

1. تمهيد:

- ندرس حركة ما من خلال إيجاد قانون الحركة: وهي العلاقة الجبرية التي تربط إحداثيات المتحرك (مكانه) بالزمن، الأمر الذي يمكننا من تعيين مكان المتحرك في كل لحظة زمنية.

- سندرس الحركة (هنا) بالنسبة لمجلة عطالية؛ والمجلة العطالية: هي المجلة التي يتحرك بالنسبة لها المطلقة (وبالتالي بالنسبة لبعضها البعض) حركة مستقيمة منتظمة).

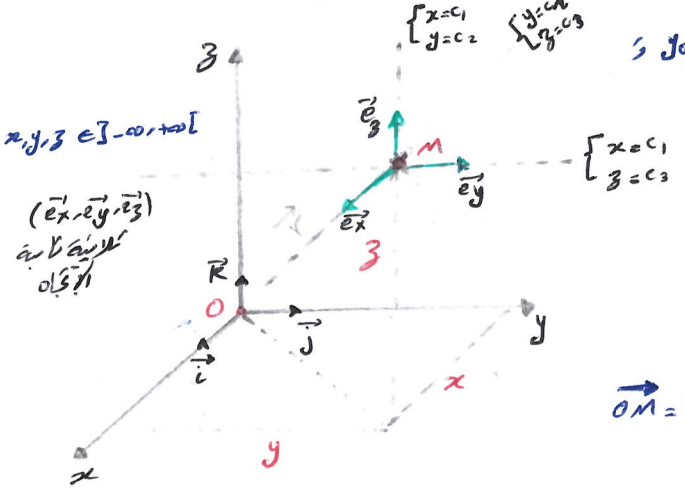
2. تعيين مكان المتحرك في جمل الإحداثيات المختلفة:

سنقوم بتعيين مكان المتحرك بالنسبة إلى مجموعة إحداثيات ثابتة (المجلة المطلقة) وذلك وفق ثلاث طرق:

①. المجلة الديكارتية (الكرتيزية):

- يمكن تمثيل النقطة M بالإحداثيات الديكارتية بالشكل (x, y, z)، وكما موضح بالشكل المجاور (1)

- حيث تمثل x، y، z البعد عن المستويات yoz، zox، xoy على الترتيب.



الشكل (1): تمثيل الحركة في المجلة الديكارتية.

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}) \equiv (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لأنها:
① بسيطة يسهل فهمها.
② ... لها ثابت الاتجاه.
③ ... ولقيم الطويلة.

- وهكذا نستطيع كتابة نصف القطر الشعاعي (متجه الموضع) الذي يحدد مكان المتحرك "شعاعيا" بالعلاقة:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{---- ①}$$
$$= x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

- نوجد متجهة الإزاحة (تفاضل متجه الموضع):

$$d\vec{r} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z} \quad \text{..... ②}$$

- نوجد متجهي السرعة والتسارع:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} \quad \text{..... ③}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z} \quad \text{..... ④}$$

* المجلة العطالية: هي المجلة التي يتحقق فيها مبدأ نيوتن الأول.

* المجلة المطلقة: هي مجلة عطالية ثابتة.

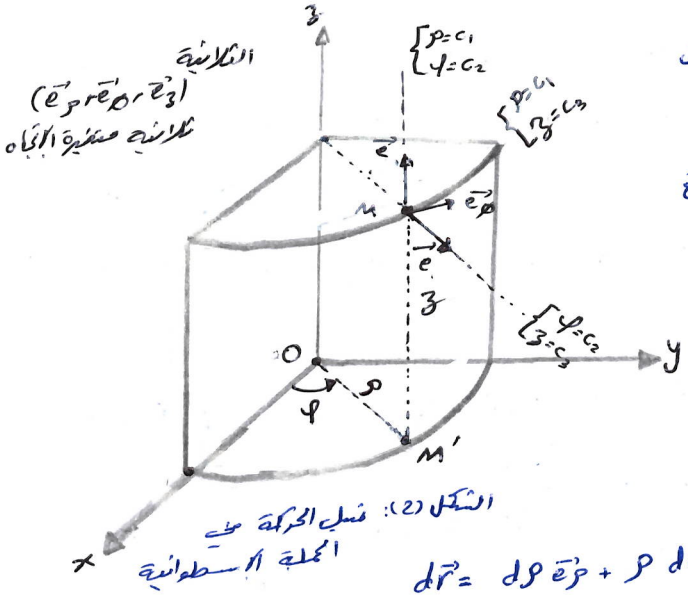
2. الحلة الأسطوانية :

- يمكن تمثيل النقطة M في الإحداثيات الأسطوانية بالشكل (ρ, φ, z) ، وكما هو موضح بالشكل المجاور (2)

- حيث :

تمثل ρ نصف قطر الأسطوانة أو المسافة الشعاعية من المحور z باتجاه النقطة M ؛ $\rho \in [0, \infty[$

تمثل φ زاوية السمت وتقاس من المحور x وتقع في المستوى xoy ؛ $\varphi \in [0, 2\pi]$.



الشكل (2): تمثيل الحركة في الحلة الأسطوانية

- لدينا من الشكل المجاور :

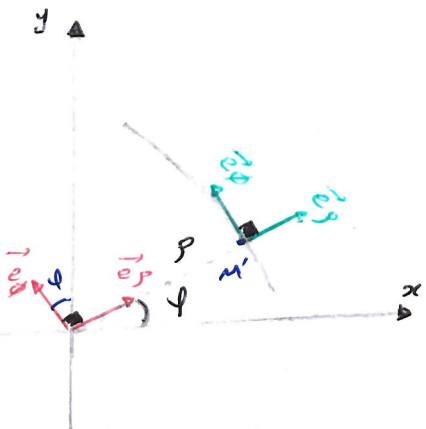
$$\vec{r}(t) = \vec{oM'} + \vec{M'M} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad \text{.....(5)}$$

- نوجد معبر الإزاحة :

$$d\vec{r} = d\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\, d\vec{e}_\rho + dz\, \vec{e}_z \quad \text{.....(6)}$$

ومن الشكل (3) نجد أن :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \quad \text{.....(7)}$$



الشكل (3): مساقط المتجهات $\vec{e}_\rho$ و $\vec{e}_\varphi$ وزاوية في المستوي xoy .

ومنه يكون :

$$d\vec{e}_\rho = [-\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y]\, d\varphi = d\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

وبتعويض النتيجة الأخيرة في العلاقة (6) نجد :

$$d\vec{r} = (d\rho)\vec{e}_\rho + \rho(d\varphi)\vec{e}_\varphi + dz\, \vec{e}_z \quad \text{.....(8)}$$

- نوجد معبر السرعة : بقسمة العلاقة (8) على العنصر الزمني dt .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \dot{z}\, \vec{e}_z \quad \text{.....(9)}$$

- نوجد تفاضل معبر السرعة :

$$d\vec{v} = d\dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \dot{\rho}\, d\vec{e}_\rho + d\rho\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \rho(d\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\, d\vec{e}_\varphi + d\dot{z}\, \vec{e}_z$$
$$= d\dot{\rho}\, \vec{e}_\rho + \dot{\rho}(d\varphi)\vec{e}_\varphi + d\rho\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi + \rho(d\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}(d\varphi)\vec{e}_\rho + d\dot{z}\, \vec{e}_z \quad \text{.....(10)}$$

وبالقسمة على عنصر الزمن dt وتجميع الحدود نجد معبر التسارع $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2]\,\vec{e}_\rho + [\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}]\,\vec{e}_\phi + \ddot{z}\,\vec{e}_z \quad \text{---------- (11)}$$

ملاحظة :

مصفوفة التحويل بين متجهات الوحدة الكارتيزية والأسطوانية [نعطينا متجهات الوحدة الأسطوانية بدلالة الكارتيزية] :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad \text{------ (12)}$$

3) الجملة الكروية :

- نمثل النقطة M في الإحداثيات الكروية بالشكل (r, θ, ϕ) ، كما هو موضح بالشكل المجاور (4) .

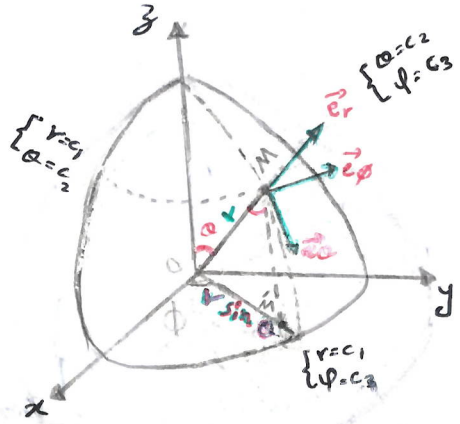
- حيث :

r : تمثل المسافة الشعاعية من نقطة الأصل إلى النقطة M .

ϕ : الزاوية المقاسة من المحور x إلى مسقط متجه الموضع للنقطة M في المستوى xoy .

θ : الزاوية بين المحور z ومتجه موضع النقطة M.

$$r \in [0, \infty[\;\&\; \theta \in [0, \pi] \;\&\; \phi \in [0, 2\pi]$$



الشكل (4) : الحركة في جملة الإحداثيات الكروية .

- لدينا من الشكل :

$$\vec{r}(t) = r\,\vec{e}_r \quad \text{------ (13)}$$

- نوجد تفاضل متجه الموضع :

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r \quad \text{------ (14)}$$

- لإيجاد $d\vec{e}_r$ نوجد أولاً مسقط $\vec{e}_r$ على $\overrightarrow{OM'}$ ومنتج مسقط على كلٍّ من : ox ، oy

مسقط $\vec{e}_r$ على $\overrightarrow{OM'}$: $\sin\theta\,\vec{e}_{OM'}$ $\xrightarrow[ox \text{ و } oy]{\text{على المستقيمين}}$ $\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y$

مسقط $\vec{e}_r$ على $\vec{oz}$: $\cos\theta\,\vec{e}_z$

وبالتالي : $\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$ ---- (15)

$(d\theta)$ $(d\phi)$

عليه : $d\vec{e}_r = \cos\theta\cos\phi(d\theta)\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\sin\phi(d\phi)\vec{e}_x + \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_y$

$-\sin\theta(d\theta)\,\vec{e}_z$ ---- (16)

- وكما نرى من الرسم هاينا نلاحظ انّ $\vec{e}_\alpha$ ينتج عن $\vec{e}_r$ بتدوير بزاوية $(\frac{\pi}{2})$ في مستوى سنا مركزي، اي انّ:

$$\vec{e}_\alpha = \vec{e}_r(\alpha+\tfrac{\pi}{2},\phi) = \sin(\alpha+\tfrac{\pi}{2})\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin(\alpha+\tfrac{\pi}{2})\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos(\alpha+\tfrac{\pi}{2})\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\alpha = \cos\alpha\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\alpha\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\alpha\,\vec{e}_z \quad \cdots\cdots (17)$$

- وبتعويض ذلك في العلاقة (16) نجد انّ:

$$d\vec{e}_r = \vec{e}_\alpha\,d\alpha + \sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi \qquad ; \qquad \vec{e}_\phi = \vec{e}_r \times \vec{e}_\alpha = -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y \quad \cdots (18)$$

- وتصبح العلاقة (14) بالشكل:

$$d\vec{r} = \vec{e}_r\,dr + r\vec{e}_\alpha\,d\alpha + r\sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi \quad \cdots (19)$$

- نحصل على السرعة في الإحداثيات الكروية بقسمة (19) على عنصر الزمن dt:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\alpha}\,\vec{e}_\alpha + r\sin\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi$$

- نوجد تفاضل معجّه السرعة:

$$d\vec{v} = \vec{e}_r\,d\dot{r} + \dot{r}\,d\vec{e}_r + \dot{\alpha}\vec{e}_\alpha\,dr + r\vec{e}_\alpha\,d\dot{\alpha} + r\dot{\alpha}\,d\vec{e}_\alpha + \sin\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,dr + r\cos\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,d\alpha + r\sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\dot{\phi} + r\sin\alpha\,\dot{\phi}\,d\vec{e}_\phi \quad \cdots\cdots (20)$$

وبملاحظة انّ:

(*) $d\vec{e}_\alpha = -\sin\alpha\cos\phi\,\vec{e}_x\,d\alpha - \sin\alpha\sin\phi\,\vec{e}_y\,d\alpha - \cos\alpha\,\vec{e}_z\,d\alpha - \cos\alpha\sin\phi\,\vec{e}_x\,d\phi + \cos\alpha\cos\phi\,\vec{e}_y\,d\phi$

$$\Rightarrow d\vec{e}_\alpha = -\vec{e}_r\,d\alpha + \cos\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi$$

(*) $d\vec{e}_\phi = d\vec{e}_r \times \vec{e}_\alpha + \vec{e}_r \times d\vec{e}_\alpha = [\vec{e}_\alpha\,d\alpha + \sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi]\,\vec{e}_\alpha + \vec{e}_r \times [-\vec{e}_r\,d\alpha + \cos\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi]$

$$= -\sin\alpha\,\vec{e}_r\,d\phi - \cos\alpha\,\vec{e}_\alpha\,d\phi$$

- وبالتعويض في العلاقة (20) نجد:

$$d\vec{v} = \vec{e}_r\,d\dot{r} + \dot{r}[\vec{e}_\alpha\,d\alpha + \sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi] + \dot{\alpha}\vec{e}_\alpha\,dr + r\vec{e}_\alpha\,d\dot{\alpha} + r\dot{\alpha}[-\vec{e}_r\,d\alpha + \cos\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\phi] + \sin\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,dr + r\cos\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi\,d\alpha + r\sin\alpha\,\vec{e}_\phi\,d\dot{\phi} + r\sin\alpha\,\dot{\phi}[-\sin\alpha\,\vec{e}_r\,d\phi - \cos\alpha\,\vec{e}_\alpha\,d\phi] \quad \cdots\cdots (21)$$

- نحصل على التسارع بقسمة العلاقة الأخيرة على عنصر الزمن dt:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\alpha}\,\vec{e}_\alpha + \dot{r}\sin\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + \dot{r}\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha + r\ddot{\alpha}\,\vec{e}_\alpha - r\dot{\alpha}^2\vec{e}_r + r\dot{\alpha}\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_\phi + \dot{r}\sin\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\dot{\alpha}\cos\alpha\,\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi + r\sin\alpha\,\ddot{\phi}\,\vec{e}_\phi - r\sin^2\alpha\,\dot{\phi}^2\vec{e}_r - r\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\phi}^2\vec{e}_\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha]\,\vec{e}_r + r[\ddot{\alpha} + \tfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\phi}^2]\,\vec{e}_\alpha + r\sin\alpha[\ddot{\phi} + \tfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\dot{\alpha}\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha] \quad \cdots\cdots (22)$$

ملاحظة ② :

تعطى مصفوفة التحويل بين متجهات الوحدة الديكارتية والكروية [تعطينا متجهات الوحدة الكروية بدلالة الديكارتية] :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (23)$$

3. قوانين نيوتن :

(أ) المبدأ الأول « مبدأ العطالة » :

قام النقطة المادية المعزولة عن أي تأثير خارجي على وضعها الحركي ؛

① . فإذا كانت ساكنة ، بالنسبة إلى جملة ثابتة ، فإنها تبقى كذلك .

② . وإذا كانت متحركة حركة مستقيمة منتظمة فإنها لا تستطيع أن تغير من حركتها المنتظمة هذه .

(ب) المبدأ الثاني « القانون الأساسي في التحريك » :

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ في جسم كتلته ثابتة m فإنها تكسبه تسارعا $\vec{a}$ يتناسب مع القوة المؤثرة $\vec{F}$ طبقا للعلاقة :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \cdots\cdots (24)$$

(ج) المبدأ الثالث :

لكل فعل رد فعل ، يساويه ويعاكسه بالإشارة .

4. المسألتان المباشرة والعكسية في التحريك :

- المسألة الأولى « المباشرة » :

وفيها يطلب حساب القوة المؤثرة في المتحرك وذلك إذا علم قانون الحركة .

$\vec{r}(t)$ معلوم $\Rightarrow \ddot{\vec{r}}(t) \Rightarrow m\ddot{\vec{r}}$

- المسألة الثانية « العكسية » :

وفي هذه المسألة يطلب إيجاد قانون الحركة إذا علمت القوة المؤثرة في المتحرك .

- نفرض أن القوة في الحالة العامة من الشكل : $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. وبالتعويض في (24) نجد :

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right) \quad \cdots\cdots (25)$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، حلها من الشكل :

$$f_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t, C_1) = 0 \quad \cdots\cdots (26)$$

وإذا كاملنا (26) فإننا نحصل على قانون الحركة بالشكل :

$$f_2(\vec{r}, t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) = 0 \quad \cdots\cdots (27)$$

- حيث C_1 و C_2 ثوابت، نحصل عليهما من الشروط الابتدائية [أي بمعرفة سرعة وموضع المركبة في اللحظة $t=t_0$ على الترتيب]، والتي توضع بالشكل:

$$t=t_0 \begin{cases} \vec{r}=\vec{r}_0 \\ \vec{r}'=\vec{r}_0'=\vec{v}_0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (28)$$

- وبناءً على ذلك يمكن إعادة كتابة (28) بالشكل:

$$\vec{r}=\vec{r}(t,\vec{v}_0,\vec{r}_0) \quad \cdots\cdots (29)$$

- وبإسقاط معادلة الحركة (29) على المحاور الإحداثية الديكارتية، نحصل على ثلاث معادلات بالشكل:

$$x=x(t,x_0',y_0',z_0',x_0,y_0,z_0) \;;\; y=(t,x_0',y_0',z_0',x_0,y_0,z_0) \;;\; z=(t,x_0',y_0',z_0',x_0,y_0,z_0) \quad \cdots\cdots (30)$$

ملاحظة (3):

- إن اختيار المحاور الإحداثية الديكارتية للإسقاط عليها هو اختياري صرف، وقد يتم الإسقاط على أي محاور إحداثية مناسبة، وتتعلق ذلك بطبيعة المسألة وشروطها.

مكتبة A to Z