كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الثامنة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

$$k(t) = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \frac{T'}{|T'|} \quad \ldots (1)$$

ندعو العلاقة (1) المقدار الموجب:

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$

ثابت التقوس في لحظة t:

دستور فرينيه الأول

$$\frac{dT}{ds}(t) = k(t)\, \vec{N}(t) \quad \ldots (2)$$

تمرين: احسب تقوس منحني الدائري المعطى بالتابع

$$\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, j - t k$$

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\, i + \cos j + k$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{r'(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\sin t\, i + \cos j + k\right]$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

التقوس يعطى بالعلاقة:

$$k(t) = \frac{|\vec{T}'|}{|T'|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

المنحني لعبارة المعادلة

$$K(t) = 0 \quad \forall t \in R$$

مبرهنة (2) إذا كان منحني Γ لولبياً فإن تقوسه عبارة عن عدد ثابت موجب تماماً في جميع نقاطه:

أي أن: $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow K(t) = K > 0$

فإن Γ هو منحني لولبي.

الشعاع شاقولي مماسي:

لتكن نقطة مادية متحركة على منحني Γ معطى تابع شعاع $r(t)$

عندئذ $\overline{v}(t) = r'(t)$

هو شعاع شعاع نقطة لحظة $v = 0$

$$v_{(t)} = v T$$

وبالتالي

$$\overline{a}(t) = v' t - v_T$$

$$a(t) = v_1' t + v_r t_1$$

لكن

$$K(t) = \frac{\overline{T_1}'}{T} = \frac{T_1}{v_K}$$

$$\overline{T}' = v_{K(t)} \cdot \overline{N}$$

وبالتالي $\frac{dB}{ds} \perp T$

وبما أن طول $\overline{B}$ ثابت لعدد واحد أي $\frac{dB}{ds} \perp B$

وبالتالي $\frac{dB}{ds} \parallel \overline{N}$

لتعلق منحنٍ فراغي

وهنا سابقاً أن تقوس منحنٍ فراغي عند نقطة M ابتداءً منها في لحظة t_0) هو عدد حقيقي غير سالب

$$K(t_0) = \left| \frac{dT}{ds}(t_0) \right|$$

يقيس سرعة حركة مماس عند تلك النقطة كذلك الالتفاف لمنحنٍ فراغي هو عدد حقيقي يقيس سرعة حركة شعاع ناظم لو حركة حركة مستوي ملاصق أي مستوي مار بـ M_0 و مساعد لشعاع ناظم فإن كان منحنٍ مستوي فالالتفاف معدوم لكان مستوٍ ملاصق وشعاع ثنائي ناظم ثابت وبالتالي الالتفاف معدوم.

من مبرهنة السابقة وهنا أن:

$$\frac{df}{ds}(t_0) \parallel N(t_0)$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي

$$\frac{dB}{dt} = -\tau(t_0) \cdot \bar{N}(t_0)$$

وهو $\tau(t_0)$ الالتفاف لمنحنٍ الفراغي عند نقطة M_0 في لحظة t_0 وبالتالي

$$\tau(t_0) = \left| \frac{dB}{ds}(t_0) \right|$$

فالالتفاف عند نقطة من منحنٍ يعطينا قياساً لانحراف المنحني مستوي ملاصق المنحني عند ذلك النقطة:

دستور فرنية الثلاثية:

$$\frac{dB}{ds} = -\tau(t)\,\bar{N}(t)$$

$$\frac{dN}{ds}(t) \qquad \text{لحسب}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{ds} = \frac{dB}{ds} \wedge T + \vec{B} \wedge \frac{dT}{ds}$$

$$= (-\tau \vec{N}) \wedge \vec{T} + B \wedge \frac{dT}{ds}$$

$$= -\tau \vec{N} \wedge \vec{T} + k B \wedge \vec{N}$$

$$= -\tau(-\vec{B}) + k(-\vec{T})$$

$$= +\tau \vec{B} - k\vec{T}$$

$$\frac{dN}{ds} = \tau . \vec{B} - k . T$$

ومنه نحصل على دساتير فرينة

$$\frac{dT}{ds} = k . \vec{N}$$

$$\frac{dN}{ds} = \tau \vec{B} - k \vec{T}$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau . \vec{N}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

دساتير شعاعية للتقوس والالتفاف

$$K(t) = \frac{|r'(t) \wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

$$\tau = \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{(\bar{r}' \wedge \bar{r}'')^2}$$

مثال: ليكن تابع شعاعي التالي:

$\bar{r} = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 ;\ r(t) = t^3 + 5i$
$+ (6t-7)\bar{j} + (3t^2+1)K^2$

هل املس عند جميع نقاطه ؟

احسب التقوس والالتفاف عند جميع نقاط الاملس عندها:

$\bar{r}'(t) = 3t^2 \vec{i} + 6\vec{j} + 6t\, K$

$r''(t) = 6t\, i + 6j + 6K$

$r'''(t) = 6i + 0 + 0$

$|\vec{r}'| = \sqrt{9t^4 + 36 + 2}$

$= 3(t^2+2) \neq 0$

التقوس يعطى بالعلاقة

$$K(t) = \frac{|r'(t) \wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

$$r'(t) \wedge r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3t^2 & 6 & 6t \\ 6t & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 36\vec{i} + 18t^2\vec{j} - 36K$

$|\bar{r}' \wedge \bar{r}''| = \sqrt{(36)^2 + (18)^2 t^4 + (36)^2 t^2}$

$$\Rightarrow k(t_1) = \frac{18\sqrt{4t^2+4t^4}}{3(t^2+2)^3}$$

$M_0(5,-7,1)$ مثلا نعوض في نقطة

$t=0$ والتي تقابلها

$$k(t) = \frac{36}{36\cdot 6} = \frac{1}{6}$$

لنقاف نعوض بالعلاقة

$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \wedge r''|^2}$$

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} 3t^2 & 0 & 6t \\ 6t & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 216$


مكتبة
A to Z
مكتبة A to Z
فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN
طباعة محاضرات ـ قرطاسية
Mob:0931 497 960