كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المنحني: هو تابع شعاعي معرف بالشكل $\vec{P}: [a,b] \to R^3$

$t \to P(t) = P_1(t)\vec{i} + P_2(t)\vec{j} + P_3(t)\vec{k}$

أو $P(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

برموز المنحني C:

1) المنحني C بداية مرتبطة $P(a)$ نهايته $P(a)$

2) نقول عن C مغلق $\Leftarrow P(a) = P(b)$

3) نقول عن النقطة $r_0 \in C$ أنها مضاعفة إذا وفقط إذا وجد $t_1 \neq t_2$ من $[a,b]$ بحيث $\vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_2)$

ملاحظات:

a) المنحنى بسيط: نقول عن منحنى أنه بسيط إذا كان لا يحوي نقاط مضاعفة.

b) النقطة العادية: نقول عن $t_0 \in [a,b]$ عادية إذا وفقط إذا كانت $P'(t_0) \neq 0$ وإلا فهي نظامية.

c) المنحنى الأملس: هو منحنى الذي يحقق الشرط التالي

$\forall t \in [a,b] \Rightarrow \boxed{\vec{P}'(t) \neq 0}$

أي لا يحوي نقاط شاذة.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: لتكن التابعان الشعاعيان التاليان:

$\vec{r_1} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{r_1} = t^2\vec{i} + \cos\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{r_2} = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + e^t\vec{k}$

عندئذ $\vec{r_1}' = 2t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 0^K$

$\vec{r_2}' = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + e^t K$

نلاحظ أن $t=0$ جذر لـ $r_1'(t)$ بالتالي $r_1(t)$ ليس منحني أملس

$\forall t \in [-1,1] \Rightarrow r_2 t \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_2't \neq 0$ أي r_2 منحني أملس

إيجاد النقط الشاذة:

$t_1 \neq t_2 \in [-1,1]$

حيث $\vec{r_1}(t) = \vec{r_2}(t)$

$= t_1^2 i + \cos t_1 \vec{j} + 2\vec{k}$

$= t_2^2 i + \cos t_2 \vec{j} + 2\vec{k}$

$t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1 = t_2$

$\cos t_1 = \cos t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 + 2\pi K$

$Z = Z$ وهذا

بالتالي $\vec{r_1}$ الحوي نقاط شاذة بالتالي الحوي نقاط مضاعفة

بالتالي المنحني ليس بسيط وليس أملس

تعريف: شعاع واحدي للماس

ليكن Γ منحني أملس عندها شعاع واحدي المماس يعطى بالعلاقة:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad \ldots (1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\,i - \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\,j + \frac{1}{\sqrt{2}}\,k$$

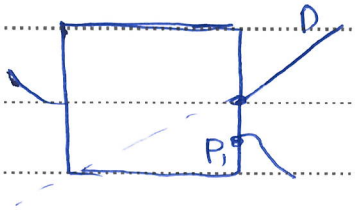
ثالثاً: لتكن التابع الخطي:

$$\vec{L} = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}$$

1- معادلة المستوي الناظم D للمنحني C عند النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تعطى بالعلاقة

$$D = \frac{x - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{y - g(y_0)}{g'(y_0)} = \frac{z - h(z_0)}{h'(z_0)}$$

2- يعرف طول مقطع المستوي الناظم P للمنحني C عند النقطة M_0.



بأنه طول P الذي يمر بالنقطة M_0 والذي يحدد بالمستقيم الناظم D للمنحني C عند النقطة M_0 وتعطى معادلته بالعلاقة

$$P = f'(t_0)(x - f(t_0)) + g'(t_0)(x - g(t_0)) + h'(t_0)(t - h(t))$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف شعاع واحدة الناظم الأساسي:

ليكن γ منحنى قابل لـ x مشتق مرتين عندما شعاع واحدة الناظم

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \quad ..2 \quad \text{ت ـ 81}$$

$$\frac{R(t)}{|R(t)|} = \frac{x'\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

شعاع واحدة ثنائي الناظم:

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N} \quad ..(3)$$

ملاحظة: $\vec{B} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{N}$

$\vec{B} \cdot \vec{T} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{T}$

مثال: ليكن التابع الشعاعي التالي:

$\vec{r}[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow \vec{r}(t) = \cos i + \sin j + tk$

والمطلوب أوجد $\vec{T}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{N}$

$$\vec{T}(t) = \frac{-\sin t\, i + \cos j + k}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

$$T'(t) = \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\sin^2 t}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

طول المنحنى: ليكون منحنى أملس عندها طول المنحنى من a إلى b هو

$$S(t) = \int_a^t |F'(t)|\,dt$$

$$S'(t) = |F'(t)|$$

تمرين: ليكن التابع الشعاعي $r(t) = (t^3, 3t^2 - 2, 6t + 1)$

1) أوجد معادلات المستقيم والمستوي الناظم للتابع الشعاعي السابق في النقطة $B(1,1,7)$

2) اثبت أن $|r'(t)| = 3(t^2+2)$ ثم احسب طول القوس المنحنى C من التابع الشعاعي المحدد بالنقطتين $A(0,-2,1)$, $B(1,1,-7)$

الحل

$$B(1,1,7) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$F(1,1,7) = (f(x_0), g(y_0), h(z_0))$$

$$r(t) = (t^3, 3t^2 - 2, 6t + 1)$$

من أجل $(1,1,7)$ فإن $t = 1$

$$r'(t) = (3t^2, 6t, 6)$$

$$r'(1) = (3, 6, 6)$$

$$D = \frac{x - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{y - g(y_0)}{g'(y_0)} = \frac{z - h(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$D = \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-7}{6}$$

معادلة مستوي الناظم

$$3(x-1) - 6(y-1) + 6(z-7) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

[2]

$r(t) = (3+t^2, 6t, 6) \Rightarrow r'(t) = |r'(t)|$

$r'(t) = \sqrt{9t^2+36t^2+36} = 3\sqrt{t^4+4t^2+4} = 3\sqrt{(t^2+2)^2}$

$= 3(t^2+2)$

من أجل $A(0,-2,1)$ نجد $t_0 = 0$

من أجل $B(1,1,7)$ نجد $t_0 = 1$

$$S(t) = \int_0^1 r(t)\,dt = \int_0^1 3(t^2+2)dt$$

$$S(t) = 3\int_0^1 (t^2+2)dt = 3(t^2+2)\,dt$$

من أجل

$$= 3\left[\frac{1}{3}+1-0\right] = 4$$

تمرين: ليكن التابع الآتي

$\vec{r}(t)\ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow \left(\frac{1}{t+1}, 3t^2-2t, \sin t\right)$

المطلوب: أوجد معادلة المماس والمستوي الناظم للتابع الشعاعي في النقطة $A(1,7,0)$

الحل: من أجل $(1,7,0) \Leftarrow t_0 = 0$

$r(t) = \vec{i} + 7\vec{j} + 0\vec{k}$

$r(t)' = -\frac{1}{(t+1)^2}\vec{i} + (6t-2)\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$

$r'(0) = -1\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\frac{x-f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{y-g(y_0)}{g'(y_0)} = \frac{z-h(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-0}{1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة المستوى:

$f'(x_0)(x - f(x_0)) + g'(y_0)[y - g(y_0)]$

$+ h'(z_0)(z - h(z_0)) = 0$

$= -(x-1) - 2(y-7) + z = 0$

طريقة ثانية:

$f(t) = \frac{1}{t+1}$

$g(t) = -3t^2 - 2t + 4$

$h(t) = \sin t$

$f'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$, $g'(t) = 6t - 2$, $h'(t) = \cos t$

$f(x_0) = 1$, $g'(y_0) = 7$, $h(z_0) = 0$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة