كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

توابع الشعاعية والسلمية:

تعريف التابع السلمي: ليكن $W \subseteq \mathbb{R}$ التابع السلمي هو

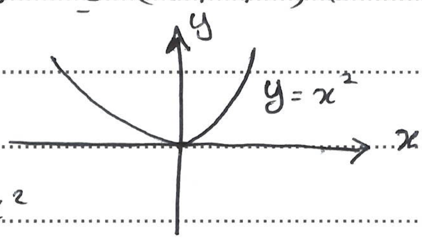
$F: W \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; x \longrightarrow F(x)$

W ← مجموعة تعريف ، $\mathbb{R}$ ← مجموعة مستقر

يمثل مجموعة النقاط $(x, f(x))$ في مستوي ديكارتي ويسمى هذه النقاط منحني التابع

$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$



(x, x^2) إذ $f(x) = x^2$

تعريف التابع الشعاعي: ليكن $W \subseteq \mathbb{R}$ التابع الشعاعي هو

$\vec{F}: W \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$M \longrightarrow \vec{F}(M)$

$\vec{F}(M) = F_1(M)\vec{i} + F_2(M)\vec{j} + F_3(M)\vec{k}$

أو نكتب بصورة $\vec{F}(M) = (F_1(M), F_2(M), F_3(M))$

تكون المعادلات الوسيطية لمنحني التابع الشعاعي كما يلي

$x = F_1(M)$ و $y = F_2(M)$ و $z = F_3(M)$

هي عبارة عن توابع سلمية ولتكن مجموعة تعريفها هي على الترتيب

W_1, W_2, W_3

فيكون مجموعة تعريف التابع الشعاعي $\vec{F}$ هي:

$W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$

ومجموعة المستقر هي مجموعة النقاط التي تحقق معادلة $\vec{F}$

مثال: $\vec{F}(t) = t\vec{i} + \sqrt{2t}\,\vec{j} + \vec{k}$

تابع شعاعي للمتحول t مجموع تعريفه هي تقاطع مجموعات تعريف مركباته

$x = t \;,\; y = \sqrt{2t} \;,\; z = 1$

$W_1 = R \;,\; W_2 = [0, +\infty[\;,\; W_3 = IR$

$W = W_1 \cap W_2 \cap W_3 = [0, +\infty[$

$\vec{F} : [0, \infty[\longrightarrow IR^3$

المستقر المنحني لتابع شعاعي $\vec{F}$:

هو مجموعة نقاط المستوي التي يرسمها $\vec{F}$

مثال:

لنكن لدينا التابع الشعاعي: $\vec{F} : IR \longrightarrow IR^2$

$\vec{F}(t) = (t^2 - 2t \,,\, t + 1)$

$x = t^2 - 2t \;,\; y = t + 1 \Rightarrow t = y - 1$

$\Rightarrow x = (y-1)^2 - 2(y-1)$

$x = y^2 + 1 - 2y - 2y + 2$

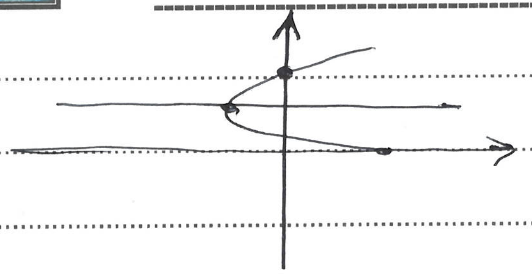
$x = y^2 - 4y + 3$

$x = y^2 - 4y + 1 + 3 - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 - 1$

$1 + x = (y-2)^2$

هي معادلة قطع مكافئ ذروته $(-1, 2)$ ومحور يوازي ox.



$y = 0 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

$x = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = +1$

$y - 2 = +1 \Rightarrow y = 3$

$y - 2 = -1 \Rightarrow y = 1$

مجموعة نقاط القطع المكافئ فهي تمثل مستقر منحني لتابع شعاعي F الذي هي
مجموعة النقاط التي يرسمها شعاع $\vec{F}, \vec{OM}$
إذا مستقر التابع فهو مجموعة النقاط $\vec{OM}$ التي تتغير t وترسم ملاحظ

$x + 1 = (y-2)$

أوجد المستقر المنحني لتابع شعاعي

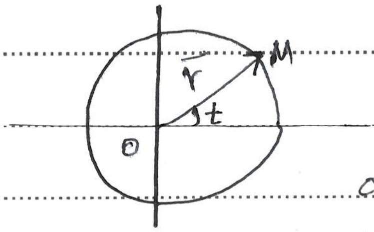
$\vec{r} : [0, 2\pi] \longrightarrow R^2$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

دائرة مركزها $(0, 0)$ نصف قطرها 1



حيث t هي الزاوية التي يصنعها

شعاع $\vec{OM} = r$ مع محورها ox

حيث $M(x(t), y(t))$

مثال:

$$\vec{r} : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\} x^2 + y^2 = 1$$

$$z = t$$

$t = 0$

$x = 1 \ , y = 0 \ , z = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$

$x = 0 \ , y = 1 \ , z = \frac{\pi}{2}$

نلاحظ أن مسقط المنحني على مستوي xoy صورة الدائرة وإن تابع شعاعي $r(t)$ يصف حركة نقطة مادية انطلقت من نقطة $(1,0,0)$ من لحظة $t = \frac{\pi}{2}$ ووصلت إلى نقطة $(0,1,\frac{\pi}{2})$ ~~عند~~ استغرقت هذه الحركة لولبية حيث وصلت في لحظة $t = 2\pi$ إلى نقطة $(1,0,2\pi)$ وانتهت الحركة في لحظة $t = 4\pi$ أي عند النقطة $(1,0,4\pi)$ وانتهت الحركة في لحظة وهذه الحركة لولبية تمت على سطح اسطوانة قاعدتها محورها من ارتفاع 4π.

نهاية تابع شعاعي:

ليكن للتابع الشعاعي $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

حيث $f, g, h \quad A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

توابع حقيقية من أجل كل $t_0 \in A$ نقول أن للتابع الشعاعي $\vec{r}(t)$

نهاية عند t_0

ونرمز لها بشعاع $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$

$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = (a, b, c)$ شعاع

إذا وفقط إذا كانت $\lim_{t \to t_0} f(t) = a, \lim_{t \to t_0} g(t) = b, \lim (h(t)) = c$

$\lim_{t \to t_0} r(t) = (\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t))$

مثال: أوجد نهاية التابع الشعاعي

[1] $\vec{r}(\frac{1}{t}, 2t, t^2)$

عند: $\leftarrow (t_1 = \infty, t_2 = 0, t_3 = 1)$

$\lim_{t \to \infty} r(t) = (0, \infty, \infty)$

$\lim_{t \to 0} r(t) = (\infty, 0, 0)$

$\lim_{t \to 1} r(t) = (1, 2, 1)$

أو مرنهاية: $\vec{r}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{2t-1}{3t+6}, e^{-t} \right)$

$t_1 = 0 , t_2 = \infty$

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}(t) = \left(1, \frac{-1}{6}, 1 \right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \vec{r}(t) = \left(0, \frac{2}{3}, 0 \right)$$

ليكن التابع الشعاعي: $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

$\vec{r} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

حيث توابع $f, g, h \quad A \to \mathbb{R}$

توابع سلمية عندئذ:

a) نقول أن التابع $\vec{r}$ أنه مستمر عند $t_0 \in A$ إذا وفقط إذا كان كلاً من التوابع f, g, h مستمراً عند t_0 وهذا يكفي

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r} = \vec{r}(t_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0))$$

b) نقول عن التابع $\vec{r}$ أنه يقبل الاشتقاق عند A إذا وفقط إذا كان كلا من توابع f, g, h تقبل الاشتقاق عند t_0 عندئذ نجد أن

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

وهذا يكافئ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t_0 + M) - \vec{r}(t_0)}{M}$$

الموقف التفاضلي

نعرف تفاضل تكامل تابع الشعاعي :

$r(t)$ بأنه :

$$d\vec{r} = dF(t)\vec{i} + dg(t)\vec{j} + dh(t)\vec{k}$$

a) نقول عن تابع $\vec{r}$ (أنه يقبل المكاملة) على مجال $A \geq [a,b]$

إذا وفقط إذا كان كل من توابع f, g, h قابل للمكاملة على مجال $[a,b] \leq A$

وعندها :

$$\int_a^b r(A)\,dt = \left(\int_a^b F(t)\,dt, \int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt\right)$$

ونعرف تكامل غير محدد لتابع بشكل مشابه .

مثال :

$$r(t) = \left[\frac{1}{t+1}, 3t^2 - 2t + 7, \sin t\right]$$

$$w_1 = \mathbb{R} \setminus -1, \quad w_2 = \mathbb{R}, \quad w_3 = \mathbb{R}$$

$$\overline{w} = w_1 \cap w_2 \cap w_3 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{-1}{(t+1)^2}, 6t - 2, \cos t\right)$$

متكامل :

$$\left(\int \frac{1}{(t+1)}, \int 3t^2 - 2t + 7, \int \sin t\right)$$

$$= \left[\ln(t+1), t^3 - t^2 + 7t + c, -\cos t + k_1\right)$$

المعنى الهندسي للمشتق تابع الشعاعي :

ليكن تابع شعاعي :

$$\vec{r} = A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (r(t) = F(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

حيث :

$f, g, h : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع سلمية قابلة للاشتقاق على A

عندئذ إذا كان $t_0 \in A$ مع $0 \neq \vec{r}(t_0)$ فإن مشتق $\vec{r}'(t_0)$ سيكون

مماساً من نقطة $M_0(F(t_0), g(t_0), h(t_0))$

$\vec{OM}$ $\vec{r}(t_0)$

ليكن $\vec{F}(M)$, $\vec{g}(M)$ توابع شعاعية فإن:

1) $\dfrac{d(\vec{F}+\vec{g})}{dM} = \dfrac{d\vec{F}}{dM} + \dfrac{d\vec{g}}{dM}$

2) $\dfrac{d(\vec{F}\times\vec{g})}{dM} = \dfrac{d\vec{F}}{dM}\times\vec{g} + \vec{F}\times\dfrac{d\vec{g}}{dM}$

3) $\dfrac{d(\vec{F}\wedge\vec{g})}{dM} = \dfrac{d\vec{F}}{dM}\wedge\vec{g} + \vec{F}\wedge\dfrac{d\vec{g}}{dM}$ غير تبديلي

4) إذا $V_i\ h, W \Rightarrow R$ تابع سلمي

وبالتالي $\dfrac{d(h\cdot\vec{g})}{dM} = \dfrac{dh}{dM}\cdot\vec{g} + h\dfrac{d\vec{g}}{dM}$

انتهت المحاضرة