كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

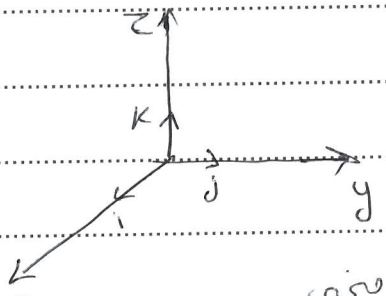
يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مستوى: هو سطح غير محدد ثنائي البعد يحتاج البعدين أكثر منطرحة في الفضاء

a. مستقيم ونقطة خارجة عنه

b. نقاط ليست على استقامة واحدة

c. مستقيمين متقاطعين أو متوازيين



$M_0(x_0, y_0, z_0)$

1) معادلة المستوى المار من نقطة ومعامدي

معلوم $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة

$\vec{N}(p, q, r)$ شعاع معلوم x نفترض $M(x, y, z)$ نقطة

عامة على المستوى المطلوب فيكون $\vec{N}$ الشعاع الناظم على المستوى

$$\vec{M_0M} \times \vec{N} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \vec{M_0M} \perp \vec{N}$$

نسمي (1): المعادلة الشعاعية للمستوي المطلوب ومعادلة المستوي هي

$$p(x, y, z) = 0$$

$$px + qy + rz + h = 0$$

$$h = -(px_0 + qy_0 + ry_0)$$

حيث p, q, r أعداد ثابتة $\vec{N}(x_0, y_0, z_0)$ في الإحداثيات M_0

مثال:

أوجد معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $M_0(1,2,3)$ ويعامد $\vec{a}(1,0,3)$

طريقة 1:

الحل: نفترض $M(x,y,z)$ نقطة جاءل مستوي P

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$

$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)(p_x, q, r) = 0$

$(x-1, y-2, z-3)(1,0,3) = 0$

$x - 1 + 3z - 9 = 0$

$x + 3z - 10 = 0$

معادلة مستوي مطلوبة

[2] معادلة مستوي يمر بنقطة معلومة وبواسطة شعاعين معلومين:

ليكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة من مستوي P وليكن الشعاعان المعلومان

$\vec{V_1}(a_1, b_1, c_1)$

$\vec{V_2}(a_2, b_2, c_2)$

$M(x,y,z)$ نقطة جاءل المستوي المطلوب يؤدي الجداء

$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{N}$ $\quad c = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

أي أن ناظم المستوي هو الجداء الخارجي لـ $\vec{V_1}, \vec{V_2}$

$$\vec{N} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\vec{P}i + \vec{q}j + rk$

وبالتالي معادلة المستوي المطلوب هكذا:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في هذه الحالة يكون المعادلة موجهة بالناظم $\vec{N}$

$\vec{N} = \vec{M_1M_2} \wedge \vec{M_1M_2}$

ويكون معادلة المستوي بالشكل

$$p(x_1, y_1, z_1) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \quad \dots (3)$$

مثال: اكتب معادلة المستوي الذي يمر بالنقاط

$M_1(-1, 6, 2)$, $M_2(3, 0, 1)$, $M_3(2, 1, -1)$

[2] هل المستوي ناتج p حوامل محاور المعالم p؟

[3] أوجد نقاط تقاطع مستوي p مع محاور الإحداثيات الديكارتي.

الحل:

معادلة مستوي في (3)

$$p(x, y, z) = \begin{vmatrix} x+1 & y-6 & z-2 \\ 3+1 & 0-6 & 1-2 \\ 2+1 & 1-6 & -1-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & y-6 & z-2 \\ 4 & -6 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 13x + 9y + 2z - 37 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$px+qy+rz+h=0 \quad ; \quad h=-[px_0+qy_0+rz_0]$$

مثال:

أوجد معادلة المستوي الذي يمر من $M_0(1,2,3)$ ومعامل المستوي

$$p_1(x,y,z)=2x-y+z-1=0$$

$$p_2(x,y,z)=-x+2y-4y+5=0$$

الحل:

بما أن المستويين p_1, p_2 معامدان للمستوي p بالتالي ناظم كل منهما يوازي مستوي الطرف p

$$V_1=(2,-1,1)\perp p_1$$

$$V_2(-1,2,-4)\perp p_2$$

$$\vec{N}=\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N}=2\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$$

معادلة المستوي:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

$$2x+7y+3z-25=0$$

3) معادلة مستوي حاوي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

نفرض أن هذه هي:

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $\quad M_3(x_3,y_3,z_3)$

$M_2(x_2,y_2,z_2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) لأنه مثلاً x, y, z غير معدومة بالتالي المستوي لا يوازي أي من محاور الإحداثيات

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$13x + 9y - 2z = 37$

$\frac{x}{\frac{37}{13}} + \frac{y}{\frac{37}{9}} - \frac{z}{\frac{37}{2}} = 1$

بالتالي نقاط تقاطع مع المحاور ox , oy , oz

$\vec{ox}\left(\frac{37}{13}, 0, 0\right)$

$\vec{oy}\left(0, \frac{37}{9}, 0\right)$

$\vec{oz}\left(0, 0, -\frac{37}{2}\right)$

معادلة مستوي يمر بنقطتين معلومتين وتوازي شعاعاً معلوم.

نفرض أن النقطتين هما

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

والشعاع الموازي للمستوي مطلوب

$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}\,(\vec{V} \wedge \overrightarrow{M_1M_2})$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة: أمثال x الأحرف في معادلة مستوي $2y - z - 3 = 0$ تعطي مستوي موازي للمحور $\vec{ox}$

$\vec{ox}(1, 0, 0)$

$\vec{N}(0, 9, 2)$

$\vec{N} \cdot \vec{ox} = 9y + 2z = 0$ $\Rightarrow$ وهي معادلة العامة للمستوي موازي لمحور $\vec{ox}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة المستوي المقطع محاور الإحداثيات الآتية :

$A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

معادلة مستوي P

$$\frac{y}{\frac{3}{2}}-\frac{z}{3}=1$$

المقطع مستوي بـ $\overrightarrow{oy}\ (0,\frac{3}{2},0)$

$\overrightarrow{oz}\ (0,0,-3)$

ملاحظة هامة :

تعلم أن المعادلة العامة للمستوي بالشكل

$$P(x,y,z): px+qy+rz+h=0$$

1) إذا كان $h=0$ فالمعادلة تمثل مستوي حاوي المبدأ

2) " " $p=0$ " " يوازي المحور $\overrightarrow{ox}$

3) " " $q=0$ " " $\overrightarrow{oy}$

4) " " $r=0$ " " $\overrightarrow{oz}$

5) " " $r=q=0$ " " معادلة $px+b$ تمثل مستوي يوازي yoz

6) " " $q=p=0$ " " $ry+h$ تمثل مستوي يوازي xoy

7) إذا كان $r=p=0$ فالمعادلة $qy+h=0$ تمثل معادلة مستوي يوازي xoy

إذا كان في مسألة $h=0$ أو $5, b, 7$ حكم على معادلة مستوي أنها

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كيف نجد معادلة مستوي المارين بـ xoy ، zox ، yoz

$y=0, x=0, z=0$

$\vec{V}(a,b,c)$ $\vec{U}(a',b',c')$

$$\theta = \arccos \frac{\vec{V}\cdot\vec{U}}{|\vec{V}|\cdot|\vec{U}|}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta$$

الزاوية بين مستويين:

الزاوية بين مستويين P_1 و P_2 هي الزاوية بين الناظمين $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$

$$\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} = |\vec{N_1}||\vec{N_2}|\cos\theta$$ نكتب ونعطي

$$\cos\theta = \frac{|\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}|}{|\vec{N_1}|\cdot|\vec{N_2}|}$$

$M_1 = (P_1, q_1, r_1)$

$M_2 = (P_2, q_2, r_2)$

$$= \frac{P_1P_2 - q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{P_1^2+q_1^2+r_1^2}\ \sqrt{P_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

إذا كانت إشارة هذا الكسر تكون زاوية حادة

" " " منفرجة

" " " 0 " قائمة

شرط تعامد P_1 و P_2 هو $\vec{N_1} \perp \vec{N_2}$ أي

$\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

شرط توازي $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \lambda$

إذا كان $\frac{h_1}{h_2} = \lambda$ مستويين متطابقين

بعد نقطة عن مستو $P(x_1, y_1, z)$

$= px + qy + rz + h = 0$

ليكن النقطة الواقعة خارج المستوي $M_0(x_0, y_0, z_0)$ منكون

المسافة بين M_0 والمستوي

$$\delta = \frac{p(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

إذا كانت δ موجبة تكون M_0 واقعة بالنسبة للمستوي في جهة موجهة للناظم $\vec{n}$

إذا كانت δ سالبة تكون M_0 واقعة بالنسبة معاكسة

إذا كانت $\delta = 0$ بالتالي M_0 هي نقطة من مستوي P

شعاع الواحدة من مستوي

$\vec{n} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

معادلة كرة في فراغ

ليكن كرة في فراغ أحد طرفي القطر الذي مركزها $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نصف قطرها $r > 0$ بأنها مجموعة نقاط فراغ $M(x, y, z)$ والتي بعدها عن M_0 هو r

تعطى معادلة الكرة بالشكل

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال

أوجد معادلة كرة مارة بنقطة (2, 6, 0) ومركزها (-1, -7, -3)

$R = \sqrt{1+49+9} = \sqrt{59}$

$(x-2)^2 + (y-6)^2 + z^2 = 59$

هي معادلة كرة.

ملاحظة:

تقسم المقادير الفيزيائية إلى قسمين:

مقادير سلمية:

تقاس بعدد حقيقي وإلى واحدة قياس مثل كتلة - طول - درجة حرارة

مقادير شعاعية:

تقاس بعدد حقيقي وإلى واحدة قياس ووجهة مثل سرعة - تسارع - قوة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة