كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الثالثة/نظري/كتابة

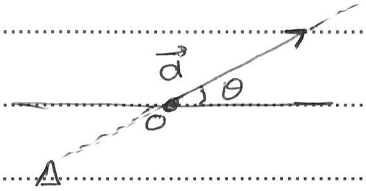
القسم: فيزياء
السنة: الثانية
المادة: تحليل متجهي

الدكتور: ....
المحاضرة:
نظري 3

التاريخ: 24/10/2024

يعرف المتجه هو قطعة مستقيمة موجهة ليتعين بـ أربع عناصر:

1) مبدأ متجه
2) جهة المتجه
3) الطويلة / الشدة / النظيم
4) الحامل المتجه (المحور الحامل للمتجه)



مثال: متجه $\vec{a} = \vec{OB}$

نقطة مبدأ: O

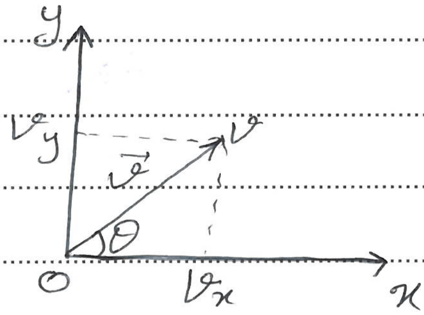
الرأس: B والاتجاه من O إلى B

الطويلة OB أو $|\vec{OB}|$

حامل المتجه هو Δ المحور الحامل لـ $\vec{OB}$

ميل المتجه هو $\tan\theta$

تحليل المتجه:



مسقط $\vec{v}$ على O_x هو v_x

مسقط $\vec{v}$ على Oy هو v_y

الزاوية بين الشعاع $\vec{v}$ والمحور $\vec{Ox}$ هي θ حيث أن حامل المتجه يتعين بمعرفة الزاوية مع المحور $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ و 1

$v_x = |\vec{v}| \cdot \cos\theta = v\cos\theta$

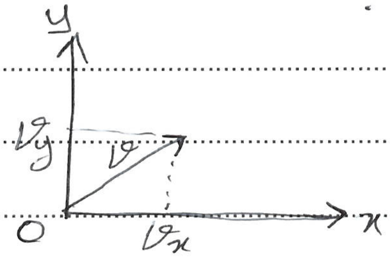
$v_y = |\vec{v}| \sin\theta = v \sin\theta$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $\theta = \arctan \dfrac{v_y}{v_x}$

تمرين: أوجد مساقط المتجه $\vec{u}$ حيث

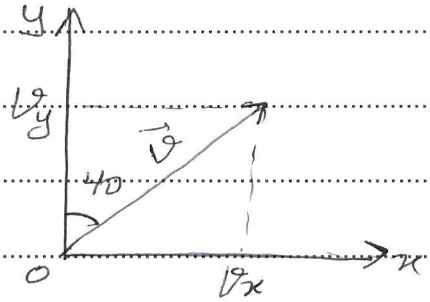
$|\vec{u}| = 15m$

$\theta_r = 30^\circ$



$V_x = 15 \cos 30 = 12{,}99$

$V_y = 15 \sin 30 = 7.5$



$|\vec{v}| = 20$

$v_y = |\vec{v}| \cos\theta = 20 \cos 40 = 15.32$

$v_x = |\vec{v}| \sin\theta = 20 \sin 40 = 12.86$

$v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

العبارة التحليلية للمتجه:

لتكن لدينا النقطة M : $M(x, y)$ في مستوي Oxy

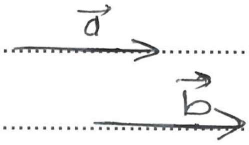
$\vec{i}$ متجه الواحدة للمحور Ox ، $\vec{j}$ متجه الواحد للمحور $\vec{Oy}$ عندئذ

العبارة التحليلية للمتجه $\vec{v} = OM$ ، $\vec{v} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

جمع المتجهات وطرحها:

إذا كانت لدينا المتجهات $\vec{b}$, $\vec{a}$, θ الزاوية بينهما نميز الحالات التالية

[1] المتجهات المتوازيات:

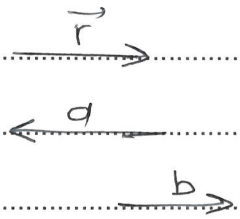


لهم نفس الاتجاه ($\theta = 0$)

ناتج الجمع $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$

$r = a + b$

[2] متعاكسات $\theta = 180$



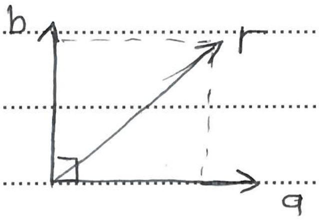
$r = \vec{a} + \vec{b}$

$r = a - b$; $a > b$

الجهة بجهة متجه الأكبر

$r = b - a$; $b > a$

[3] متجهات متعامدات



($\theta = 90$)

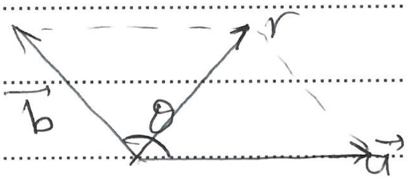
حسب فيثاغورث يكون ناتج الجمع هو قطر متوازي الأضلاع المقام a, b والذي نقطة البدء هي نقطة بدء لكل من a , b

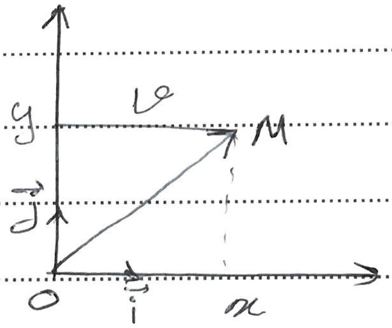
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ حاصل الجمع

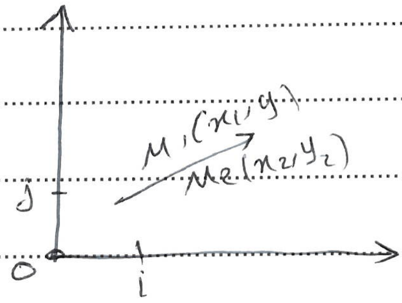
$r = |\vec{r}|$ و $b = |\vec{b}|$ و $a = |\vec{a}|$

[4] متجهات غير متوازيات

وغير متعامدين بينها







$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$

$(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

$\overrightarrow{M_2M_1} = -\overrightarrow{M_1M_2}$

مثال: أوجد طويلة المتجه $\overrightarrow{M_1M_2}$ المعرف بالنقطتين:

$M_1(1,2)$ و $M_2(5,1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$

$\overrightarrow{OM_1} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OM_2} = 5\vec{i} + \vec{j}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = 4\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

مثال:

أوجد طويلة المتجه $\overrightarrow{M_1M_2}$ المعرف بالنقطتين

$\cancel{M_1(1,2), M_2(7,1)}$ $\quad M_1(1,1,1),\ M_2(5,4,2)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

ضرب متجه بعدد:

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

نضرب بالعدد $a \in \mathbb{R}$

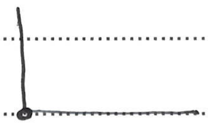
$a\vec{u} = ax\vec{i} + ay\vec{j} + az\vec{k}$

الضرب بعدد:

ليكن a عدد حقيقي ولدينا المتجه $\vec{A}$

$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

فإن $a\vec{M}$ هو متجه يساوي الصفر إذا كان $a=0$



② يوازي a وله نفس الجهة إذا كان $u>0$

وطوله $|\vec{OA}| = a|\vec{A}|$

③ يوازي A وله عكس جهته إذا كان $a<0$

$|a\vec{A}| = a|\vec{A}|$

(ax, ay, az)

$\vec{A} + \vec{B} = (x_A, y_A, z_A) + (x_B, y_B, z_B)$

$= (x_a \mp x_B, y_a \mp y_B, z_B \mp z_B)$

الجداء السلمي لمتجهين

$A.B = (x_1, y_1, z_1).(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{A}.\vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{A}|^2$

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \cos\theta$

$\theta = \arccos \frac{\vec{A} . \vec{B}}{|\vec{A}| . |\vec{B}|}$

مثال: $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B}(0, -1, 1)$

أوجد الزاوية بين المتجهين

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 - 2 + 3 = +1$

$|\vec{A}| = \sqrt{14}$, $|\vec{B}| = \sqrt{2}$

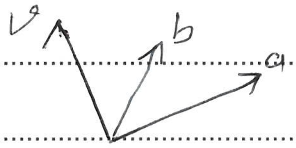
$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{2}}$$

ينعدم الجداء السلمي عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ الجداء المتجهي لشعاعين متجهين

هو متجه 1- عامود على كل من المتجهين.

2- يتعين بقاعدة اليد اليمنى

3- طويلته تعطى بالعلاقة



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\theta$$

ملاحظة

الجداء المتجهي غير السلمي $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

ينعدم الجداء المتجهي إذا توازى صدري المتجهين

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$