كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

مثال: حل المعادلة التالية:

$$y\,dx + (x - x^3y^3)\,dy = 0$$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 3x^2y^3$$

⇐ غير تامة.

نبحث عن عامل تكامل

نفرض $\omega = x.y$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\omega_x + N\omega_y}\, dx.y$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{3x^2y^3}{[x - x^3y^3]y - y}\, dx.y$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{3x^2y^3}{-x^3y^4} = \frac{-3}{x.y}\, dx.y$$

$$\ln \mu = \ln \frac{1}{x^3.y^3} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^3.y^3}$$

$$\frac{1}{x^3.y^2}\,dx + \frac{x - x^3y^3}{x^3y^3}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{x^3.y^2}\,dx + \frac{1}{x^2y^3}\,dy - dy = 0$$

$$d\left(-\frac{1}{2x^2y}\right) - dy = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2x^2y} - y = c$$ وهو التكامل العام

المعادلات الغير محلولة لـ y' :

معادلات قابلة للتحليل وتعود إلى عدة معادلات محلولة بالنسبة للمشتق

$$A_n y'^{n} + A_{n-1} y'^{n-1} \dots A_0 = 0$$

بالتحليل تصبح

$$[y' - f_1(x,y)]\,[y' - f_2(x,y)] \times \dots [y' - f_n(x,y)] = 0$$

إما $y' - f_1 = 0$

$y' = f_n(x,y)$ المحلولة لـ y' حلها

$$\phi_1(x,y,c) = 0$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x,y,c) = 0 \qquad y' = f_n(x,y)$$

التكامل العام لهذه المعادلة (1) هو :

$$\phi_1(x,y,c) \times \phi_2(x,y,c) \times \dots \phi_n(x,y,c) = 0$$

مثال: حل المعادلة الآتية: $y'^2 - 2yy' - y^2(e^x - 1) = 0$

الحل: معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ y'

$\Delta = 4y^2 - 4[-y^2](e^x - 1)$

$= \cancel{4y^2} - \cancel{4y^2} + 4y^2e^x$

إما $y' = \dfrac{+2y + 2ye^{\frac{x}{2}}}{2}$

$y' = [1 + e^{\frac{x}{2}}]$

$\dfrac{dy}{y} = (1 + e^{\frac{x}{2}})\,dx$

نكامل:

$\ln y = x + 2e^{\frac{x}{2}} + c$

إما $\ln y - x + 2e^{\frac{x}{2}} - c = 0 \quad \dots (2)$

أو $y' = [1 - e^{\frac{x}{2}}]y$

$\dfrac{dy}{y} = [1 - e^{\frac{x}{2}}]dx$

$\ln y - x + 2e^{\frac{x}{2}} - c = 0 \quad \dots (3)$

ومنه التكامل العام هو ضرب (2) مع (3)

نحصل على $(\ln y - x - 2e^{\frac{x}{2}} - c)(\ln y - x + 2e^{\frac{x}{2}} - c) = 0$

النوع الثاني:

المعادلات المحلولة بالنسبة لـ y:

الشكل العام لها $y = f(x, y')$

نفرض $y' = z$

$$y = f(x, z) \quad \dots (5)$$

نشتق طرفي (5)

$$y' = \frac{\partial F(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'$$

نعوض بـ $y' = z$

$$\frac{\partial F(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z' = z$$

معادلة محلولة بالنسبة لـ z:

$$f(x, z, c) = 0 \quad \dots (6)$$

فنجمع معادلة حلها (5) و (6).

مثال: أوجد حل معادلة $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

$$y = xy'^2 + 2xy'$$

نفرض $y' = z$

$$y = xz^2 + 2xz \quad (7)$$

نشتق طرفي (7)

$$y' = z = z^2 + 2z + (2xz + 2x) z'$$

$$-z^2 - z = 2x(z+1)\frac{dz}{dx}$$

$$-z[z+1]\,dx = 2x[z+1]\,dz$$

نقسم على $2xz(z+1) \neq 0$

$$\frac{-dx}{2x} = \frac{dz}{z} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2}\ln x = \ln z + c$$

7 مع 8 هو الحل الوسيطي للمعادلة

معادلة لاغرانج

هي معادلة خاصة من الحلول بالنسبة للتابع y شكلها

$$y = x f(y') + g(y') \quad .. (9)$$

نفرض $y' = z$

$$y = x f(z) + g(z) \quad ...(10)$$

نشتق مرة بالنسبة لـ x مرة بالنسبة لـ z

$$y' = z = f(z) + (x f'(z) + g'(z) z')$$

وهي معادلة خطية بالنسبة لـ x تابع و z تحول مستقل لذلك نرتاد الحل بشكل

$$\frac{z - f(z)}{x f'(z) + g'(z)} = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{x f'(z) + g'(z)}{z - f(z)} = x'$$

$$x' = \frac{f'(z)}{z - f(z)} x + \frac{g'(z)}{z - f(z)}$$

$$x' - \frac{f'(z)}{z - f(z)} x = \frac{g'(z)}{z - f(z)}$$

$$x' - \frac{f(z)'}{z - f(z)} x + \frac{g'(z)}{z - f(z)}$$

$$x' = \frac{f(z')}{z - f(z)} x + \frac{g'(z)}{z - f(z)}$$

$$x' - \frac{f(z')}{z - f(z)} x = \frac{g'(z)}{z - f(z)}$$

وبالتالي نحصل

على الحل الوسيطي ح $\boxed{10}$

مثال $y = 2xy' - y'^2$

معادلة لاغرانج بفرض $y' = z$

$$\Rightarrow y = 2xz - z^3 \quad \ldots (11)$$

نشتق $y' = z = 2z + (2x - 3z^2) z'$

$$-z = (2x - 3z^2)\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{2x - 3z^2}{-z} = x'$$

$$\Rightarrow x' + \frac{2}{z} x = 3z$$

$$p(z) = \frac{2}{z}$$

$$q = 3z$$

$$\Rightarrow x = ce^{-\int e dz} + e^{-\int p dz} \int q e^{\int e dz} dz$$

$$x = \frac{c}{z^2} + \frac{1}{z^2}\int z^2 (3z) dz$$

$$x = \frac{c}{z^2} + \frac{1}{z^2}\left[\frac{3}{4} z^4\right]$$

$$x = \frac{c}{z^2} + \frac{3}{4} z^2 \quad (12)$$

(11) و 12 هو الحل الوسيطي للمعادلة مطلوبة

معادلة كليرو:

حالة خاصة من لاغرانج الشكل هو

$$y = xy' + g(y') \quad (13)$$

بفرض $y' = z$

$$y = xz + g(z) \quad (14)$$

نشتق $\boxed{14}$

$$y' = z = z + (x + g')z'$$

$$\Leftarrow (x + g'(z))z' = 0$$

$$(x + g'(z))z' = 0$$

$$z = c \Leftarrow z' = 0$$

$$\Leftarrow y = xc + gc$$

حل معادلة كليرو

انتهت المحاضرة