كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : جبر خطي

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* حل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

- ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

- نسمي (II) جملة معادلات خطية متجانسة.

- عند تطبيق طريقة غاوس جوردن على المعادلات الخطية (II) فإننا نقوم بنفس الدراسة التي أجريناها على جملة معادلات الخطية الغير متجانسة (I) مع الملاحظة:

أن الدراسة تتم على المصفوفة A ، نلاحظ مايلي:

1- يمكن أن يظهر لدينا سطر من الشكل $[0\ 0\ \dots\ 0;\alpha]$ حيث $\alpha \neq 0$ وبالتالي الجملة لا يمكن أن تكون متوافقة الحل.

2- إذا تحولت A إلى مصفوفة مثلثية فالجملة لها حل وحيد هو الحل الصفري.

3- إذا تحولت A إلى مصفوفة سلمية غير منتهية فإن الجملة المواقفة لها عدد لانهائي من الحلول بعد تعيين المجاهيل الحرة والرئيسية وإعطاء المجاهيل الحرة قيم كيفية وحساب المجاهيل الرئيسية بدلالة المجاهيل الحرة فإننا نكتب عمود المجاهيل الحرة بدلالة هذه القيم الكيفية:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- بالاستفادة من خواص المصفوفات فإننا نحصل على عبارة خطية بالمصفوفة بالشكل الآتي:

★ إذا كانت $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{1C}$ هي القيم العينية المعطاة للمجاهيل الحرة

فإن:

$$\star \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{1C} x_{1C}$$

- نسمي العبارة (★) عبارة الحل العام للجملة (II).

- كما تكون مجموعة الحلول $[X_1, X_2, \dots, X_{1C}]$ هي مجموعة الحلول الرئيسية (الأساسية) للجملة (II) وتكون أساساً لفضاء الحل.

مثال (1):

أوجد عبارة الحل العام للجملة ثم عين بعد أساس فضاء الحل:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & +2 & +1 \\ 1 & 1 & -4 & +2 \end{bmatrix} \xrightarrow{i_2 \leftrightarrow i_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & +2 \\ 3 & -1 & +2 & +1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3i_1 + i_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & +2 \\ 0 & -4 & 14 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ مصفوفة مثلثية

إن جملة معادلات الخطية المرافقة لهذه المصفوفة:

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \quad \dots (1)$$

$$-4x_2 + 14x_3 - 5x_4 = 0 \quad \dots (2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا مجهولان رئيسيان x_2 و x_1 ومجهولان حرّان x_3, x_4

لنفرض أن $x_3 = \alpha$ ، $x_4 = \beta$ نعوض في (2)

$$x_2 = -\frac{1}{4}(-14x_3 + 5x_4)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{+14\alpha - 5\beta}{4}$$

نعوض في (1)

$$x_1 = -x_2 + 4x_3 - 2x_4$$

$$= \frac{-14\alpha + 5\beta}{4} + 4\alpha - 2\beta$$

$$= \frac{2\alpha - 3\beta}{4}$$

عبارة الحل العام هي

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha - 3\beta}{4} \\ \frac{+14\alpha - 5\beta}{4} \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بعد الجملة هو 2 وأساسه مؤلف من الحلول

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال (2)

حل جملة المعادلات الخطية التالية مناقشة بقيم λ:

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 0$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_3+i_3]{-2i_1+i_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}i_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{-6i_1+i_3}$$

$$\xrightarrow{-6i_1+i_3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5+\lambda \end{bmatrix}$$

اذا كانت $\lambda \neq 5$ فان المجهة تقبل حل وحيد وهو الحل الصفري

اذا كانت $\lambda = 5$ فان المجهة تكون:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جملة المعادلات المكافئة

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \quad \cdots (1)$$
$$+ x_2 + x_3 = 0 \quad \cdots (2)$$

جملة بسيطة مرتبة لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3 نفرض $x_3 = \alpha$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض $x_3 = \alpha$ في (2) $\Leftarrow$ $x_2 = -x_3$

$\Rightarrow x_2 = -\alpha$

نعوض في (1)

$x_1 = 3x_2 + x_3$

$= -3\alpha + \alpha = -2\alpha$

وبالتالي عبارة الحل العام هي:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بعد المضاعف الحل هو 1 وأساس فضاء الحل:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

★ تمارين: أوجد عبارة الحل العام وبعد وأساس لهذه الحل

الحلة (1)

$$x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - 4x_4 = 0$$
$$0 \quad x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

الحلة الثانية:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0$$

تابع الصفحة (6)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$$
$$x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0$$

تكملة الحلة 2

مراجعة

- المتجهة الذاتية والقيم الذاتية لمصفوفة مربعة:

تعريف:

ليكن لدينا مصفوفة حقيقية مربعة $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ حقل التبديل $\mathbb{R}$ نقول عن المقدار السلمي $\lambda \in \mathbb{R}$ إنه قيمة ذاتية لـ A إذا وجد محدود X غير صفري بسعته $n\times 1$ يحقق الشرط الآتي:

$$AX = \lambda X$$

يعني عندئذ الشعاع الغير صفري X يحقق المعادلة السابقة بشعاع ذاتي موافق للذاتية λ

تعريف:

ليكن لدينا مصفوفة الحقيقية المربعة $A=[a_{ij}]_n$ ، وليكن λ قيمة ذاتية لها:

- نسمي المصفوفة $A-\lambda I$ المصفوفة المميزة لـ A

- نرمز للمحدد هذه المصفوفة بـ $f(\lambda)$ أي أن:

$$f(\lambda) = |A-\lambda I|$$

هو كثير حدود بالنسبة لـ λ من الدرجة n ، نسميه كثير حدود المميز للمصفوفة A

- إذاً المعادلة $f(\lambda)=0$ أي أن:

$$|A-\lambda I| = 0$$

المعادلة المميزة لـ A

نتيجة: ليكن لدينا مصفوفة حقيقية مربعة $A=[a_{ij}]_n$ لتعيين قيمها وأشعتها نتبع:

1. نكتب المصفوفة المميزة لـ A وهي $A-\lambda I$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) نوجد المعادلة المميزة $f(\lambda) = |A - \lambda I|$

(3) نحل المعادلة المميزة نحصل على القيم الذاتية لـ A ولتكن:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$$

(4) نعوض القيم الذاتية λ_1 في المصفوفة المميزة ونحل جملة المعادلات الخطية المتجانسة الموافقة للمصفوفة الناتجة، فتكون مجموعة حلول الأسهم لهذه الجملة هي أشعة الذاتية لـ A والموافقة للقيمة الذاتية λ_1.

(5) نكرر المرحلة 4 من نوع جميع القيم الذاتية.

مثال:

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: نحل $A - \lambda I_3$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-l_2 + l_3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{j_3+j_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow f(\lambda)=0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[(-\lambda+2)(4-\lambda)-3\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)$$

$\lambda_2=5$, $\lambda_1=1$ جذر مضاعف

طريقة ثانية لحل بداية العدد:

يمكن أن نشتق سطراً أو عموداً ونحلل بعد الاختصار كالمعادلة:

$$\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

إذاً $\lambda=1$ حل للمعادلة: نقسم على $\lambda-1$

$$\begin{array}{r|l} \lambda-1 & \lambda^2-6\lambda+5 \\ \hline \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5 & \\ -\lambda^3+\lambda^2 & \\ \hline -6\lambda^2+11\lambda & \\ +6\lambda^2-6\lambda & \\ \hline 5\lambda-5 & \\ -5\lambda+5 & \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

$f(\lambda)=0$

$=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5)$

$\Rightarrow \lambda=1$ أي $\lambda=5$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1+i_3]{-i_1+i_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حلة المعادلات الموافقة

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

لدينا مجهول رئيسي x_1 ومجهولان حرّان x_2, x_3

نفرض أنّ: $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$

$$x_1 = -2x_2 - x_3$$

$$= -2\alpha - \beta$$

عبارة الحل العام:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مجموعة الحلول $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

هما الشعاعان الذاتيان الموافقان للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

من أجل $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{i_1 \Leftrightarrow i_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1+i_3]{3i_1+i_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{i_2+i_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

على المعادلات الخطية $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \cdots (1)$

$$-4x_2 + 4x_3 = 0 \quad \cdots (2)$$

لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3 نفرض $x_3 = \alpha$

من (2) نقسم على 4 نعوض $4x_2 = 4x_3$

$$x_2 = x_3 \Rightarrow x_2 = \alpha$$

من (1) نعوض

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

$$= 2\alpha - \alpha = \alpha$$

عبارة الحل العام:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مجموعة الحلول $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ مشعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 5$

تمرين: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل المنفرد

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة

المرسلة:
« Alissar Deeb »

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة