كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

- القسم: الفيزياء
- السنة الأولى

- المادة: جبر خطي (1)
- محاضرة: الخامسة نظري

* حل جملة المعادلات الخطية:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \quad (I)
$$

- نسمي (I) جملة معادلات خطية بـ n مجهول، حيث $m \neq n$ في الحالة العامة.
- نسمي $a_{ij} \in K$ أمثال أو معاملات الجملة

$$(1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq j \leq m)$$

- نسمي المقادير $b_1, b_2, \dots, b_m$ مقادير حرة أو مقادير حرة.
- نسمي المصفوفة أمثال أو معاملات الجملة (I)

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

تعريف: إذا كانت جميع المقادير الحرة في الجملة (I) أصفاراً قلنا عن الجملة (I) بأنها جملة معادلات خطية متجانسة

- أما إذا كانت أحد هذه المقادير الحرة ع الأقل لا تساوي الصفر فإننا نسمي الجملة (I) جملة معادلات خطية غير متجانسة أو اختصاراً جملة معادلات خطية.

شرط ② شرط ①

* طريقة كرامر في حل جملة معادلات الخطية غير متجانسة :

ليكن لدينا جملة معادلات الخطية (I) ، لنفرض أن $m = n$ ، ولنفرض أن محدد الجملة Δ غير معدوم $D \neq 0$ عندئذ يوجد حل وحيد لهذه الجملة يعطى بالدساتير الآتية :

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{\Delta}$$

حيث D_i $(1 \leq i \leq n)$ نحصل عليه من محدد بأن نحذف العمود i ونضع محله القيم الحرة.

مثال : أوجد حل جملة معادلات الخطية مستخدماً طريقة كرامر اذا كان ذلك ممكناً

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

الحل : حسب محدد

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8 + 27 + 1) - (6 + 6 + 6)$$
$$= 36 - 18 = 18 \neq 0$$

نستطيع الحل بطريقة كرامر :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (36 + 72 + 6) - (16 + 27 + 36)$$
$$= 114 - 79 = 35$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = (24 + 81 + 8) - (18 + 48 + 18)$$
$$= 113 - 84 = 29$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (32 + 54 + 9) - (54 + 12 + 24)$$
$$= 95 - 90 = 5$$

- حل جملة المعادلات هي :

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{35}{18}$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{29}{18}$ و $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{5}{18}$

* طريقة غاوص جوردان في حل جملة المعادلات الخطية :

ليكن لدينا جملة معادلات خطية (I) نسمي المصفوفة :

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & = b_{mn} \end{array}\right]$$

نسمي مصفوفة موسعة الجملة (I)

* لحل هذه الجملة نكتب المصفوفة الموسعة لها $\bar{A}$ ونطبق عليها التحويلات الأولية مناسبة على الأسطر فقط بغية تحويلها إلى مصفوفة شبه مثرمية $\bar{B}$

- الحالة الأولى : اذا ظهر في المصفوفة $\bar{B}$ سطراً من الشكل $[0 \quad 0 \ldots 0 | \alpha]$ فإن هذا السطر موافق المعادلة :

$$[0x_1 \quad 0x_2 \ldots 0x_n = \alpha] \quad ; [\alpha \neq 0]$$

وهي معادلة مستحيلة الحل وبالتالي الجملة (I) مستحيلة الحل

- الحالة الثانية : اذا كانت $\bar{B}$ مصفوفة مثلثية من الشكل :

$$\bar{B} \left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & C_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} & C_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} & C_n \end{array}\right]$$

فإن جملة المعادلات الخطية الموافقة لـ $\bar{B}$ والمكافئة للجملة (I) هي

$$(I)' \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = C_1 \\ \quad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = C_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad b_{nn}x_n = C_2 \end{cases}$$

فيكون للجملة (I)' حل وحيد نعينه بحساب x_n من معادلة أخيرة ، ثم نعوض قيمة x_n في معادلة ماقبل الأخيرة فنحصل على x_{n-1} وهكذا حتى x_n

الصفحة الثالثة

- الحالة الثالثة: اذا كانت $\bar{B}$ مصفوفة شبه منحرفة

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{ccccc|c}
d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} & d_{1n} & c_1 \\
0 & d_{22} & \cdots & d_{2j} & d_{2n} & c_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & d_{ij} & d_{in} & c_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

فإن جملة الخطية الموافقة لـ $\bar{B}$ هي

$$(I)'' \begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1j}x_j + \cdots + d_{1n}x_n = c_1 \\ \qquad\quad + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2j}x_j + \cdots + d_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad d_{ij}x_j + \cdots + d_{in}x_n = c_i \end{cases}$$

للجملة $(I)''$ عدد لانهائي من الحلول، عندئذ للجملة $(I)''$ نسمي المجاهيل الواقعة في بداية كل معادلة مجاهيل رئيسية وعددها في الحالة السابقة i، والمجاهيل الباقية نسميها مجاهيل حرة وعددها في الحالة السابقة $n-i$.

* لتعيين جملة حلول $(I)''$ نتبع الخطوات الآتية:

1- نعطي المجاهيل الحرة في $(I)''$ قيماً كيفية مثلاً
$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \alpha_{n-i}$

2- نحسب المجاهيل الرئيسية في $(I)''$ بدلالة هذه القيم الحرة

3- نضع الحلول التي حصلنا عليها، وهي جميعها بدلالة مقادير كيفية في مجموعة $\{ \}$ نسميها مجموعة حلول الجملة (I)

* مثال: حل جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوص:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3i_1+i_3 \\ -2i_1+i_4}]{-i_1+i_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & +1 \\ 0 & +1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & +2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & +2 \end{array}\right] \xrightarrow[i_2+i_4]{i_2+i_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & +1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \quad \cdots (1)$$
$$x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \quad \cdots (2)$$

الجملة متوافقة ولها عدد لانهائي من الحلول

لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهولان حران x_3, x_4

الصيغة الخاصة:

بفرض $\alpha = x_3$, $\beta = x_4$ نعوض في ②

$$x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$$
$$= 10\alpha - 17\beta - 2$$

نعوض في ①

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 1$$
$$= -2(10\alpha - 17\beta - 2) + 3\alpha - 5\beta + 1$$
$$= -20\alpha + 34\beta + 4 + 3\alpha - 5\beta + 1$$
$$= -17\alpha + 29\beta + 5$$

مجموعة الحلول
$$\left\{ x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5 ,\ x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2 ,\ x_3 = \alpha ,\ x_4 = \beta \right\}$$

مثال: حل جملة المعادلات الخطية مناقشة حسب قيمة λ :

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$1 + \lambda x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{i_1 \Leftrightarrow i_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\lambda i_1 + i_3]{-i_1 + i_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+1 & -\lambda+1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 + l_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & -\lambda+1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

إما $\lambda \; 2$

أو $\lambda = +1$

عندما $\lambda = -2$ فإن السطر الأخير يصبح من الشكل

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$$

وهي معادلة مستحيلة الحل وبالتالي جملة مستحيلة الحل عندما $\lambda = -2$

عندما $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

جملة معادلات الموافقة $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

لدينا عدد لا نهائي من الحلول

لدينا مجهول رئيسي x_1 ولدينا مجهولان حران x_2 و x_3

لنفرض $x_3 = \beta$ ، $x_2 = \alpha$

$$x_1 = -x_2 - x_3 + 1$$
$$= -\alpha - \beta + 1$$

مجموعة الحلول $\{x_1 = -\alpha - \beta - 1 \, , x_2 = \alpha \, , x_3 = \beta\}$

* ملاحظة: اذا كانت $\lambda \neq -2$ أو $\lambda \neq 1$

أيّ أنّ $\lambda \in R \setminus \{-2, 1\}$

تتحول المصفوفة $\overline{B}$ إلى مثلثية وبالتالي يكون للجملة حل وحيد

انتهت المحاضرة

الزميلة:

«Alissar Deeb»

الصفحة الثامنة: