كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* بعض المفاهيم الأولية:

- تعريف العملية الثنائية:

ليكن $X \neq \phi$ مجموعة ما، نقول عن عملية (*) إنها عملية ثنائية معرفة على X إذا تحقق الشرط الآتي:

* يمكن أن تكون جبرية أو طرفية

$$\forall x,y \in X \Rightarrow x*y \in X$$

- تعريف الزمرة: Group

ليكن $G \neq \phi$ مجموعة ما، ولتكن (*) عملية ثنائية معرفة عليها، نسمي البنية الجبرية $(G,*)$ إذا تحقق الشروط الآتية:

1. (*) تجميعية $\forall x,y,z \in G \Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$

2. يوجد في G عنصر حيادي بالنسبة للعملية (*) يرمز له عادةً بالرمز e أي أن:

$$\forall x \in G \Rightarrow x*e = e*x = x.$$

3. لكل عنصر x في G نظير أو مقلوب بالنسبة للعملية (*) أي أن:

النظير: $\forall x \in G \Rightarrow \exists -x \in G$ بحيث يوجد $x*(-x) = -x*x = e$

المقلوب: $\forall x \in G \Rightarrow \exists x^{-1} \in G$ بحيث يوجد $x*(x^{-1}) = x^{-1}*x = e$

(NoTe) إذا كانت العملية (*) تبديلية فإننا نقول عن الزمرة $(G,*)$ إنها زمرة تبديلية

أمثلة:
- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة
- $(\mathbb{R},+)$ زمرة
- $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة لعدم وجود لكل عنصر نظير
- $(\mathbb{R},\cdot)$ ليست زمرة لأن الصفر ليس له مقلوب

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ زمرة $\{0\}$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ زمرة

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ليست زمرة لأن العنصر ليس له معكوب $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ زمرة

$\mathbb{C}$ عقدية

تعريف الحقل: Feild

ليكن $k \neq \emptyset$ مجموعة ما، نعرف عليها عمليتين ثنائيتين $(+), (\cdot)$ نقول عن البنية الجبرية $(k, +, \cdot)$ إنها حقل إذا تحقق الشروط:

1. $(k, +)$ زمرة تبديلية.
2. $(k - \{0\}, \cdot)$ زمرة.
3. العملية $(\cdot)$ توزيعية على $(+)$ أي أن:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + x \cdot y$$

ذلك أياً تكن x, y, z من k

- في حالة خاصة: إذا كانت العملية تبديلية فإننا نقول عن الحقل $(k, +, \cdot)$ إنه حقل تبديلي

أمثلة: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حقل الأعداد الحقيقية.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حقل الأعداد العقدية.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ حقل الأعداد العادية.

المصفوفات: Matrix

تسمى المصفوفة فوق الحقل تبديلي k كل جدول مربع من العناصر ونعبر عنها بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبشكل مبسط أكثر:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad ; \quad 1\le i\le m$$
$$1\le 1\le n$$

نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة من السعة (السعة يعني: عدد الأسطر والأعمدة) $m\times n$ فوق الحقل K.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

(2 ← عدد الأسطر، 3 ← عدد الأعمدة)

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}_{1\times 4}$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

تعريف:

(1) نقول عن مصفوفتين A و B أن لهما نفس السعة إذا تساوى عدد الأسطر من الأول مع عدد الأسطر من الثاني وعدد الأعمدة من الأول مع عدد الأعمدة من الثاني.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2} \quad B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2} \quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

نلاحظ أن: $A=B$ لأن لهما نفس السعة

بكن $\begin{cases}A\neq C\\ B\neq C\end{cases}$ $\Leftarrow$ لأن ليس لهما نفس السعة / لها سعتين مختلفتين

(2) نقول عن مصفوفتين إنها متساويتين إذا كان لهما نفس السعة وكانت العناصر المتقابلة متساوية أي أن:

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad \forall (i,j)$$

« لهما نفس السعة ، ∀ تقرأ لكل »

(3) نقول عن مصفوفة A أنها حقيقية إذا كانت جميع عناصرها أعداد حقيقية.

(4) نقول عن مصفوفة A أنها عقدية إذا كانت جميع عناصرها أو إذا وجد فيها على الأقل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عناصر عقدية كانت أعداد عقدية.

منقول مصفوفة: $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ هو مصفوفة نرمز لها A^T ونحصل عليها من المصفوفة A بالمبادلة بين الأسطر والأعمدة بالترتيب

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5&0\\2&1&4&3\end{bmatrix}_{2\times 4} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\\5&4\\0&3\end{bmatrix}_{4\times 2}$$

* مرافق المصفوفة: (خاص بالمصفوفات العقدية):

إن مرافق مصفوفة عقدية A هو مصفوفة نرمز لها بالرمز $\bar{A}$ ونحصل عليها بأخذ مرافق كل عدد عقدي.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}i&5\\2-i&-3\end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow \bar{A}=\begin{bmatrix}-i&5\\2+i&-3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

أنواع المصفوفات:

(1) مصفوفة سطر ومصفوفة عمود:

- مصفوفة السطر: هي مصفوفة مؤلفة من سطر واحد $A=[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}]_{1\times n}$

- مصفوفة عمود: هي مصفوفة مؤلفة من عامود واحد

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{1m}\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

نلاحظ أن: منقول مصفوفة العامود هي مصفوفة السطر والعكس

(2) المصفوفة المستطيلة والمصفوفة المربعة:

* نقول عن مصفوفة A إنها مستطيلة إذا لم يتساوى عدد الأسطر مع عدد الأعمدة

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \text{ مستطيلة} \iff n\neq m$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

★ نقول عن مصفوفة إنها مربعة إذا تساوى عدد الأسطر مع عدد الأعمدة

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مربعة $\Leftrightarrow$ $n=m$

لذا يمكن أن المصفوفة المربعة بالشكل $A=[a_{ij}]_n$

ونقول إنها مربعة من الدرجة n

- يسمى العناصر الواقعة على المصفوفة المربعة بين (الزاوية العليا اليسرى والزاوية السفلى اليمنى) بالعناصر القطر الرئيسي.

أما العناصر الواقعة على القطر الآخر فندعوها بالعناصر القطر الثانوي.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

القطر الثانوي — القطر الرئيسي

(3) مصفوفة عنصر: هي مصفوفة مربعة من المرتبة الأولى (أي تتألف من عنصر واحد)

مثال: $A=[5]$ $\quad B=[6]$ $\quad C=[-1]$

(4) مصفوفة الصفرية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار مهما كانت سعتها

إذا كانت سعتها $m\times n$ فإننا نرمز لها بالرمز $O_{m\times n}$

(5) مصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي ليست أصفار.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(6) مصفوفة الواحدية: هي مصفوفة «مربعة مطرية» جميع عناصرها أصفار باستثناء عناصر القطر الرئيسي يكون واحد

* فإذا كانت I مصفوفة واحدية من المرتبة n فإننا نرمز لها بالرمز I_n

مثال:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

(7) مصفوفة المتناظرة: نقول عن المصفوفة $A=[a_{ij}]_n$ إنها مصفوفة متناظرة، إذا كانت مصفوفة مربعة والعناصر المتقابلة بالنسبة لقطرها الرئيسي (متساوية)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

القطر الرئيسي

(8) المصفوفة المثلثية:

* المصفوفة المثلثية العليا: نقول عن المصفوفة مربعة إنها مثلثية عليا إذا كانت جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفار. بالشكل: $A = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

* المصفوفة المثلثية السفلى: نقول عن مصفوفة مربعة إنها مثلثية سفلى إذا كانت جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي أصفار. بالشكل: $A = \begin{bmatrix} \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(9) مصفوفة الهرميتية: هي مصفوفة مربعة عقدية تحقق الشرط:

$$\bar{A} = A^T$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{bmatrix}$$

نأخذ المرافق من A:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2-3i & 4+5i \\ 2+3i & 5 & 6-2i \\ 4-5i & 6+2i & -7 \end{bmatrix}$$

نأخذ المنقول من A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2-3i & 4-5i \\ 2+3i & 5 & 6-2i \\ 4-5i & 6+2i & -7 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $\bar{A} = A^T$ وعنه A مصفوفة هرميتية

نستنتج أن:

(1) عناصر القطر الرئيسي أعداد حقيقية

(2) كل عنصرين متقابلين بالنسبة للقطر الرئيسي عناصر مترافقة

انتهت المحاضرة الأولى

الجبر الخطي

الزميلة:

Alaa-ar Deef

Alaa

بالتوفيق