كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : **السادسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

* بفرض (X,Y) شعاع لمتغيرين عشوائيين X, Y وبفرض أن:

$$Z = Z(X,Y)$$

الحل:

لنجد التوزيع المشترك لـ Z ونرمز له بـ W

$$W = \varphi(Z) = (u,v)$$

أي

$$u = \psi_1(X,Y)$$

نوجد

$$v = \psi_2(X,Y)$$

أي

ونوجد حالياً محدد

المشتقات (محدد جاكوبي)

$$W = \frac{Y}{X}$$

$$W = \frac{X}{Y}$$

$$W = X \cdot Y$$

للمشتقات الجزئية:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

وكذلك يمكننا إيجاد

$$X = X(u,v)$$
$$Y = Y(u,v)$$

بالمساعدة من محدد جاكوبي

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال: بفرض X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين لهما توزيع مشترك متجانس

تابع الكثافة:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x+y}{2}} & , x>0 \\ & y>0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ويكون $U = \frac{X}{Y}$ تابع الكثافة لـ U.

الحل: نفرض $V = Y$

$$\Leftarrow \begin{cases} Y = v \\ X = u \cdot v \end{cases} \quad U = \frac{X}{v}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

$v > 0$ مقدار موجب وهو تابع الكثافة المشترك u, v هو

$$g(u,v) = |J| f(u, v, v)$$

$$= v \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{uv+v}{2}} \quad , u>0 \quad , v>0$$

$$g(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{4} v \cdot e^{-\frac{v(u+1)}{2}} & ; u>0 \\ & v>0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وهو تابع الكثافة (u,v)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* نحصل على التابع الكثافة الهامشي:

لـ u نكامل بالنسبة لـ v

$$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)\,dv$$

كذلك لـ v

$$g(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v)\,du$$

من المثال السابق

$$g(u)=\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} v e^{-\frac{v}{2}}\,dv$$

نكامل بالتجزئة

$$w=v \longrightarrow dw=dv$$

$$dG=e^{-\frac{v(u+1)}{2}}\,du \longrightarrow G=\frac{-2}{u+1}e^{-\frac{v(u+1)}{2}}$$

$$g(u)=\frac{1}{4}\left(\frac{-2ve^{-\frac{v(u+1)}{2}}}{u+1}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{-2e^{-\frac{v(u+1)}{2}}}{u+1}\,dv\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{u+1}\cdot\frac{-2}{u+1}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{v(u+1)}{2}}$$

$$=\frac{1}{(u+1)^2}$$

نكامل بالنسبة لـ v وطرفة dv

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أحسب التوقع الرياضي الموصوف لتابع الكثافة الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{وما فوق} \end{cases}$$

الحل:

$$E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \ln 2$$

مثال:

ليكن k ثابت حقيقي يحقق شرط التوزيع الاحتمالي

$$f(x,y) = kxy \quad ; \quad x = 1,2,3$$

حيث k ثابت $\quad y = 1,2,3$

الحل:

$f(1,1) = k$	$f(2,1) = 2k$	$f(3,1) = 3k$
$f(1,2) = 2k$	$f(2,2) = 4k$	$f(3,2) = 6k$
$f(1,3) = 3k$	$f(2,3) = 6k$	$f(3,3) = 9k$

$$\sum\sum f(x,y) = \sum_{x=1,2,3} \sum_{y=1,2,3} kxy = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow k + 2k + 3k + 2k + 4k + 6k + 3k + 6k + 9k = 1$$

$$\Rightarrow 36k = 1$$

$$k = \frac{1}{36}$$

مثال:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(y+x) & ; 0<x<1 \\ & \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{ضلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P\left(0<x<\tfrac{1}{2},\ 1<Y<2\right)$$

الحل:

$$P\left(0<x<\tfrac{1}{2},\ 1<y<2\right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_1^2 \frac{3}{5}x(y+x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^2 \frac{3}{5}xy + \frac{3}{5}x^2\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{10}xy^2 + \frac{3}{5}x^2y\right]_1^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{6}{5}x + \frac{6}{5}x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{3}{5}x^2\right]dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{5} + \frac{9x^2}{20}\right)_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{40} + \frac{9}{80} = \frac{3}{20}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لدينا: دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير ثنائي مستمر

$Y \backslash X_i$	0	1	2	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{1}{12}$	1

أوجد:

① $F(1,1)$

$= P(X \leq 1, Y \leq 1)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$

② $F(-2,1)$

$= P(X \leq -2, Y \leq 1)$

$= 0$

③ $F(3.7, 4.5)$

$= P(X \leq 3.7, Y \leq 4.5)$

$= 1$

" انتهت المحاضرة "

المرسلة:

" Alissar Deeb "

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z