كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

القسم: فيزياء — الدكتور: أشرف محمد

السنة: الأولى — المحاضرة:

المادة: احتمالات وإحصاء — الخامسة نظري

بتاريخ: 2024/11/18

* في حالة وجود متغيرين عشوائيين يكون لدينا تشاع جداء الشكل (x,y) وتابع لها هو: $f(x,y)$

والشكل (x,y)

- يكون $f(x,y)$ تابع كثافة مشترك للمتغيرين x و y إذا تحقق:

عندها:

1- متقارب عند مجموعة من النقاط

2- $f(x,y) \geq 0$

3- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

ويكون:

$$P(a_1<x<b_1,\ a_2<y<b_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

أما تابع التوزيع المشترك هو:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

مثال: x, y تابع كثافة مشترك $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; 0<x<2,\ 0<y<2 \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

تحقق أنه تابع كثافة ثم أوجد تابع التوزيع المشترك:

الحل: ① متقارب

② $f(x,y) \geq 0$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\,dx\right)dy$

$$= \int_0^2 \left[\frac{1}{4}x\right]_0^2 dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{1}{2}x\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{2} = 1 \quad \text{محققة}$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{4}\,dx\,dy$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int_0^x \left(\int_0^y \frac{1}{4}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^x \left[\frac{1}{4} y \right]_0^y dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{4} y \, dx = \frac{1}{4} xy$$

ملاحظة هامة:

تابع التوزيع الهامشي

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

وتابع التوزيع لـ y

$$F_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx$$

ملاحظة (1):

عند اشتقاق توابع التوزيع الهامشية لـ x, y نحصل على تابع الكثافة لكل منهما.

ملاحظة (2): عند اشتقاق تابع التوزيع المشترك

$$\frac{d2\, F(x,y)}{dx\, dy} = f(x,y)$$

نحصل على تابع الكثافة

مثال:

$$F(x,y) = \frac{1}{4} xy$$

كما رأينا:

$$f(x,y) = \frac{d_2 F}{dx\, dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4} y\right)$$

$$= \frac{1}{4} \qquad y \in [0,2]$$

مثال:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \quad ; \quad x \in R,\ y \in R$$

أثبت أنه تابع كثافة ثم أوجد تابع التوزيع المشترك وتابعي التوزيع والكثافة الهامشية.

الحل:

(1) $f(x)$ موجب

(2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\, dx \right) dy$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)du \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{1+v^2}\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\arctan x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\arctan y + \frac{\pi}{2}\right)$$

تابع التوزيع الهامشي لـ x:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(1+u^2)(1+y^2)}\,du\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du\,[\arctan y]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$$

تابع الكثافة الهامشي لـ x هو:

$$f_1(u) = \frac{dF_1(u)}{dx} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$f_2(u) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\left(\arctan x\right)_{-\infty}^{+\infty} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\left(\arctan+\infty - \arctan-\infty\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan+\infty - \arctan-\infty\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi(1+u^2)(1+v^2)}\,du\,dv$$

تابع توزيع احتمالي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* ليكن تابع الكثافة لـ x و y

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)} & a_1 \le x \le b_1 \\ & a_2 \le y \le \end{cases}$$

* أحسب تابع التوزيع الهامشي لـ x و y:

① مستمر موجب

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\,dx\right)dy$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\left(\frac{1}{b_1-a_1}\right)dx = \left(\frac{x}{b_1-a_1}\right)_{a_1}^{b_1}$$

$$= \frac{b_1-a_1}{b_1-a_1} = 1$$

وهو تابع كثافة متولد لـ x و y

$$F(x,y) = \int_{a_1}^{x}\int_{a_2}^{y} \frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\,du\,dv$$

$$= \int_{a_1}^{x}\left[\frac{v}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\right]_{a_2}^{y} du$$

$$= \frac{y-a_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\int_{a_1}^{x} du$$

$$= \frac{y-a_2}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}\,[u]_{a_1}^{x}$$

$$= \frac{(y-a_2)(x-a_1)}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}$$

$$f_1(x) = \frac{x-a_1}{b_1-a_1}$$

$$f_2(y) = \frac{y-a_2}{b_2-a_2}$$

وهما تابعا التوزيع الهامشي لـ X و Y

انتهت المحاضرة.

إعداد:

«A.Issar Deeb»

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد تفاضل الدوال الآتية:

$y_1 = 2\cos 3x$

$y_2 = \frac{x-3}{x^2}$

الحل:

$dy_1 = -6 \sin 3x \, d(x)$

$dy_2 = \frac{x^2 - 2x(x-3)}{x^4} \, d(x)$

* تفاضل دالة الدالة:

$f'u = f'(u) \times u'(x)$

تفاضل من مرتب عليا:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y''$

تفاضل من مرتبة ثانية:

$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$

$\frac{d}{dx} = \frac{d^2x}{dx^2} = y''$

تفاضل من مرتبة ثالثة:

$\frac{d}{dx} = \frac{d^3x}{dx^3} = y'''$

تفاضل من مرتبة n:

$\frac{d^nx}{dx^n} = y^n$

مثال: أوجد تفاضل من المرتبة الثالثة $y = \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

التفاضل من مرتبة الثانية:

$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{+2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$

أي: $d^2y = \frac{2}{x^3} dx^2$

التفاضل من مرتبة ثالثة:

$\frac{d}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-6x^2}{x^6}$

$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}$

أي:

$d^3y = -\frac{6}{x^4} dx^3$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$

إذا علمت أن:

$x = \cos t$

$y = b \sin t$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$dx = -a \sin t \, dt$$

$$dy = b \cos t \, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t \, dt}{-a \sin t \, dt} = \frac{b \cos t}{-a \sin t}$$

$$= -\frac{b}{a} \cos t$$

انتهت المسألة

التوقيع:

«Alissar Deeb»

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z