كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

القسم: فيزياء　　السنة الأولى　　المحاضرة الرابعة (نظري)

مثال:

يانصيب يبيع 10000 بسعر 10 ليرة خصصت الجوائز التالية:

جائزة 5000 عدد 2

جائزة 2000 عدد 3

جائزة 1000 عدد 5

اشترى رجل بطاقة واحدة احسب توقع الربح له.

الحل:

X متحول عشوائي يدل على مقدار الربح

بالتالي يأخذ القيم الآتية:

$(-10, 5000, 2000, 1000)$

x	-10	1000	2000	5000
$p(x=x)$	$\frac{9990}{10000}$	$\frac{5}{10000}$	$\frac{3}{10000}$	$\frac{2}{10000}$

$$E(x) = \sum x_i \, p(x = x_i)$$

$$= -10\left(\frac{9990}{10000}\right) + \frac{5}{10000} + \frac{3}{10000} + \frac{2}{10000}$$

$$= -7.98$$

* بعض خواص التوقع الرياضي:

نفرض لدينا متغير عشوائي:

(1) $$y = ax + b$$

استنتاج $$E(y) = aE(x) + b$$

$$E(y) = \sum y_i \cdot p(Y = y_i)$$

$$= \sum (ax_i + b) \cdot p_i$$

$$= \sum a x_i p_i + b \sum p_i$$

$$= a \sum x_i p_i + b$$

$$= a E(x) + b$$

(2) مثال

$$Y = \frac{X}{m}$$

$$E(y) = \frac{E(x)}{m}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} , & [0,2] \\ 0 , & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} \, d(x)$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

مثال: أوجد التوقع الرياضي للمتغير

$$y = x^n$$

الحل:

$$E(y) = \int_0^2 x^n \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^{n+1}}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+2}}{2(x+2)}\right]_0^2 = \frac{2^{n+2}}{2(n+2)}$$

من أجل $n = 2$

$$E(x)^2 = \frac{2^{n+1}}{2+2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$(E(x))^2 \neq E(x)^2$$

★ العتبة الطبيعية للمتغير العشوائي X:

هي بالتعريف التي تحقق العلاقة:

$$p(x < x) = p(x > x)$$

ملاحظة: قد تكون العتبة الطبيعية موجودة وقد لا تكون موجودة بالنسبة للمتغير العشوائي المتصل

$$f(x) = 1 - F(x)$$

$$2F(x) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}$$

المستقيم $y = \frac{1}{2}$ مع منحني تابع التوزيع $f(x)$

مثال: X توزيع مستطيلي في المجال $[a,b]$ تابع التوزيع له:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a} & ; x \in [a,b] \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

أوجد العتبة الطبيعية لهذا المتحول:

الحل:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x-a) = (b-a)$$

$$2x - 2a = b - a$$

$$2x = b - a + 2a$$

$$2x = b + a \Rightarrow x = \frac{b+a}{2}$$

نلاحظ أنه تساوي

- في حالة التوزيعات المتصلة قد لا تعطينا العلاقة الآتية: قيم نصفية على شكل نقاط معينة وإنما أن تعطي مجالاً فتكون القيمة النصفية هي منتصف المجال.

مثال:

X منفصل يأخذ القيم: $1, 2, 3, \dots$ أو ... واحتمالاتها:

$$p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{2^i}$$

نلاحظ أنه أياً كانت النقاط x_i في المجال $]1,2[$ يكون

$$P(X<x) = \sum_{i<x} p_i = p_1 = \frac{1}{2}$$

$$P(X>x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - \sum_{i<x} p_i = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X<x) = P(X>x)$$

على المجال $]1,2[$ إذاً القيمة النصفية أي عدد n ينتمي للمجال $]1,2[$ لذلك تعتبر القيم النصفية

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال: عند إلقاء حجر النرد وتسجيل الرقم الظاهر نحصل على قيم المتغير العشوائي هو جدول القانون الاحتمالي:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

العلاقة $P(X<x) = P(X>x)$ تتحقق على المجال $[3,4]$ هذا يعني أن القيمة النصفية هي

$$\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$$

قياسات التشتت والتباين:

بفرض $E(X) = m$ التوقع الرياضي

$V(X) = E(X-m)^2$ أي σ^2

أما

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X-m)^2}$$

يدعى الانحراف المعياري.

ملاحظات

إذا كان X متحول عشوائي منفصل فيكون:

$$\sigma^2(X) = \sum (x_i - m)^2 p_i$$

حالة خاصة: ① إذا كان X يتوزع وفق القيم المنتهية $x_1, x_2 \dots x_n$ وكانت

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i = np = 1$

$\Rightarrow p = \frac{1}{n}$

$\sigma^2_{(x)} = \sum (\ \ - m)^2$

$\sigma^2_{(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} (x_i - m)^2$

(2) في حالة X متغير عشوائي مستمر يكون لدينا:

$\sigma^2_{(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) f(x)\, d(x)$

(3) اذا كان: $Y = ax+b$

$\sigma^2_{(y)} = E(Y_i - m) - E(y_i))^2$

$= E(ax+b$

$= E(ax - aE(x))^2$

$\Rightarrow E(a(x - E(x)))^2$

$= E(a^2 (x-m)^2$

$= a^2 E(x-m)^2 = a^2 \sigma^2_{(x)}$

حالة خاصة:

اذا كان $a = 0$ هذا يعني $Y = b$ ثابت

فيكون

$\sigma^2_{(y)} = 0$

فتباين الثابت يساوي الصفر

حالة خاصة:

$a = \frac{1}{\sigma_{(x)}}$

$b = \frac{-m}{\sigma_{(x)}}$

$E(Y) = E\left(\frac{x-m}{E(x)}\right)$

$= \frac{E(x) - m}{E(x)} = 0$

والتباين:

$\sigma^2_{(y)} = E\left(\frac{x-m}{E(x)}\right)^2$

$= \left(\frac{E(x)}{E(x)}\right)^2 = 1$

المقدار $Y = \frac{x-m}{\sigma}$

ندعوه القيمة النظامية للمتغير المتحول المنتظم المنطلق لـ x

ملاحظة: يمكن تغيير (تحويل) قيم المتحول العشوائي إلى قيم متحول منتظم بأن نطرح منها التوقع الرياضي ونقسم على الانحراف المعياري.

القيمة المتوسطة تحقق المعادلة

$f(x) = 1 - f(x)$

$F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-2x} = \frac{1}{2}$

$= e^{-2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = \ln x$

$x = \frac{\ln x}{2}$

$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\, e^{-2x}\, dx$

$u \to x \Rightarrow du = dx$

$dv = 2e^{-2x}\, du$

$v = -e^{-2x}$

$= -x\, e^{-2x} \int_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-2x}\, d(x)$

$= 0 - \left(\frac{1}{2} e^{-2x}\right)_0^{+\infty} = (0 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\sigma^2(x) = E(x)^2 - (E(x))^2$

$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, d(x) = -(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}$

* برهنة:

للحصول على قانون آخر للتباين:

$\sigma^2(x) = E(x)^2 - (E(x))^2$

لأن:

$\sigma^2(x) = (Y - E(x))^2$

$= (E(x)^2 - 2\, x\, E(x) + E(x)^2$

$= E(x)^2 - 2\, E(x)\, E(x) + E(x)^2$

$= E(x)^2 - 2\, (E(x))^2 + E(x)^2$

تمرين: X متحول عشوائي مستمر له تابع الكثافة الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(1) أوجد القيمة المتوسطة.

(2) أوجد التوقع الرياضي.

(3) أوجد التباين.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$= \int_{+0}^{x} 2e^{-2t}\, dt$

$= \left(-e^{-2t}\right)_0^{x} = -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}$

$x > 0$