كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السلاسل Series.

أولاً: المتتالية العددية والسلاسل:

* مفهوم المتتالية:

هي كل دالة $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

مجموعة جزئية منتهية تسمى متتالية ويرمز لها $[a_n]$

لها أنواع: (المتتالية الصفرية، المحدودة، المتقاربة)

لدراسة تقارب متتالية:

نعرف الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

حيث α القيمة التي تتقارب عندها المتتالية:

مثال: برهن أن المتتالية $a_n = \frac{n-1}{n}$ متقاربة من الواحد:

الحل: حسب التعريف الأساسي لتقارب متتالية:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow n > n_0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$= \left| \frac{n-1-n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

مقابل كل n_0 قيمة هي $\frac{1}{\varepsilon}$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

ثالثاً: السلاسل العددية:

إن مفهوم العام لأي سلاسل عددية:

هي عدد ناتج عن متسلية معروفة an مرتبط بالعلاقة:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

لدينا $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

من أنواع السلاسل:

(1) الهندسية: كل سلسلة منها كل عدد مضروب بقيمة ثابتة

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$

نلاحظ أن الفرق بين أي عددين يساوي المقدار الثابت

a يسمى بالحد الأول q أساس المتسلية

لإيجاد سلسلة مجاميع الهندسية (ا):

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} \quad \text{---} (1)$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} - aq^n \quad \text{---} (2)$$

بطرح (1) من (2)

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

$$S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a - aq^n$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

(2) الحسابية: كل متتالية نزيد كل حد فيها بمقدار q

$$a_i = a_{i-1} + q$$

$$a_1 = a_0 + q$$

$$a_2 = a_1 + q = a_0 + 2q$$

$$a_4 = a_3 + q = a_0 + 3q$$

$$a_n = a_0 + nq$$

(3) التوافقية: كل سلسلة حدها العام $\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$S = \sum \frac{1}{n}$$

سلسلة المجاميع الجزئية لها:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_n = 1 + \frac{n}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1 + \infty = \infty$$ وهذا يعني

ملاحظة:

تقارب سلاسل: نقول عن سلسلة أنها متقاربة إذا كانت متالية مجاميع الجزئية لها متقاربة (تسعى إلى نهاية ثابتة) وعكسه ولكي تكون متباعدة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

استخدمنا لتقارب السلاسل شرط لازم لكنه غير كافٍ هو الحد العام لأي سلسلة يجب أن يسعى إلى الصفر.

مثال (1) السلسلة الهندسية ادرس تقاربها

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

$|q| < 1$ متقاربة

$|q| > 1$ متباعدة

$q = 1$ حالة شاذة

$q = -1$ زوجية تكون العتبة الصفر (متقاربة)

فردية (تكون متباعدة)

مثال (2) ادرس تقارب السلسلة التوافقية:

نعلم أن سلسلة المجاميع الجزئية لها:

$$S_n = 1 + \frac{n}{2}$$

والحد العام:

$$\frac{1}{n} \quad n \to \infty$$

بينما $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$ متباعدة

رابعاً: الطرق العامة في اختبار السلاسل:

طريقة الأولى:

حذف عدد منتهي من حدود سلسلة لا يغير من تقارب، وحذف عدد من حدود سلسلة لا يغير من تقارب السلسلة.

مثال: ادرس تقارب السلسلة الآتية:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: نلاحظ أن الحد العام للمتتالية يسعى إلى $\frac{1}{2}$ وبالتالي:

السلسلة متباعدة حسب الشرط اللازم وليس كافي لتقارب السلاسل.

مثال: ادرس تقارب السلسلة الآتية:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

الحل:

نأخذ شكل آخر للسلسلة:

$$S=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$$

$$S_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{(1+1)}=1-\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$$

$$S_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$ حسب تعريفها

السلسلة متقاربة

* الطريقة الثانية:

نفرض لدينا سلسلتان

$S_1=\sum a_n$

$S_2=\sum b_n$

وكان $a_n>b_n$

① إذا كانت a_n متقاربة تكون b_n متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2) إذا كانت an متباعدة تكون bn متباعدة.

انتهت المحاضرة

الزميلة:

Alissar Deeb

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z