كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

رابعاً: قاعدة لوبتال:

- انطلاقاً من نظرية كوشي:

$$\frac{f(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- نأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة: إذا طبقنا قاعدة لوبتال ظهرت لدينا حالة عدم تعيين مرة ثانية نطبق قاعدة لوبتال مرة أخرى حتى نصل لقيمة النهاية.

تنبيه: لحساب نهاية من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ نستخدم قاعدة لوبتال

(مشتق البسط / مشتق المقام)

مثال ①:

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

نستخدم طريقة لوبتال أو الطرق الحسابية

نطبق لوبتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos(0)}{1}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

مثال ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x\cos x}{x - \sin x}$$

نلاحظ أنها حالة عدم تعيين والنهاية من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق لوبتال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x - x\cos x)'}{(x-\sin x)'}$$

$$= \frac{1 - 1\cos x + \sin x \cdot x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1 - \cos x + x\sin x}{1-\cos x}$$

نطبق لوبتال مرة أخرى

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

(0) (0)

نطبق لوبيتال مرة ثانية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x+(\cos x - x\sin x)}{\cos x}$$

$$=\frac{3\cos x - x\sin x}{\cos x}=\frac{3-0}{1}$$

$$=3$$

مثال (3):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

الحل:

نلاحظ أن $\frac{\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ عدم تعين

نطبق لوبيتال:

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\frac{-x^2}{x}=-x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x)=0$$

نتيجة (2): الحالات الأخرى لعدم التعين:

0^0 و 0^∞ ، 1^∞ ، $0\cdot\infty$ و $\infty\cdot 0$

* الحالة الأولى: ($0\cdot\infty$)

نطبق قاعدة لوبيتال بأخذ مقلوب إحدى الدالتين:

$$0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

أو $0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$

مثال: احسب نهاية الدالة:

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln(x))$$

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln(x))=0\cdot(-\infty)$$

عدم تعين

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)=\frac{-\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

حالة عدم تعين نطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)=\frac{x}{x}\times\frac{-x^2}{x}=\frac{-x^2}{x}$$

$$=-x$$

$$\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

* الحالة الثانية:

$(\infty^0\ ,\ 0^0\ ,\ 1^\infty)$

نأخذ لوغاريتم الطرفين ونحول هذه الحالات إلى الشكل $(0\cdot\infty)$ ثم نأخذ المقلوب إحدى الدالتين ثم نطبق لوبيتال

مثال:

$$\lim_{x\to 0}x^x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل: حالة عدم تعيين

$\lim_{x\to 0} (0^0)$

مثال: حالة عدم تعيين

$y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

الحل:

$y = \lim (\infty)^0$ حالة عدم تعيين

$\ln y = \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

نأخذ ln الطرفين

$\ln y = \lim_{x\to 0} \tan x \ln \frac{1}{x} = (0.\infty)$ عدم تعيين

نأخذ المقلوب:

$\ln y = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\infty}{\infty}$

نأخذ مقلوب لإصلاح البسط:

$\ln y = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$

$= \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x}}{(\cot x)'} = \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$

$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x}$

مثال: حالة عدم تعيين

$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0^{\infty} = 0$ حالة عدم تعيين

الحل:

نأخذ ln الطرفين

$y = x^x$

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

$\ln y = \lim_{x\to 0} (x \ln(x)) = 0.-\infty$ حالة عدم تعيين

نأخذ مقلوب واحد البسط:

$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$

نطبق لوبتال:

$\ln y = \frac{(\ln(x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$

$= \frac{-x^2}{x} = -x$

$\ln y = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$

$y = e^0 = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \Big/ -\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{\frac{x^2(1+\frac{1}{x})}{1}} \Big/ \frac{1}{x^2}$$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\ln y = 1$$

$$\Rightarrow y = e$$

خامساً: التفاضل:

* نعلم من مفهوم الاشتقاق

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'$$

أو يكتب:

$$dy = y'\,dx$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\ln y = 0 \times 1 = 0$$

$$\ln y = 0$$

$$y = e^0 \Rightarrow y = 1$$

لاحظ المثال السابق جيداً:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}} = 1^\infty = e^a$$

* يمكن برهان العلاقتين حسب لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$$

$$\ln y = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (0\times\infty)$$

نأخذ مقلوب:

$$\ln y = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

حسب لوبيتال:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد تفاضل من مرتبة الثانية $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

التفاضل من مرتبة الثانية:

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \div \frac{+2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$d^2y = \frac{2}{x^3} dx^2$$ أي:

التفاضل من مرتبة ثالثة:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-6x^2}{x^6}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}$$

أي:

$$d^3y = -\frac{6}{x^4} dx^3$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$

إذا علمت أن:

$x = \cos t$

$y = b \sin t$

مثال: أوجد تفاضل الدالة الآتية:

$$y_1 = 2\cos 3x$$

$$y_2 = \frac{x-3}{x^2}$$

الحل:

$$dy_1 = -b \sin 3x \, d(x)$$

$$dy_2 = \frac{x^2 - 2x(x-3)}{x^4} d(x)$$

* تفاضل دالة الدالة:

$$f'u = f'(u) \times u'(x)$$

تفاضل من مرتبة عليا:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y''$$

تفاضل من مرتبة ثانية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d^2x}{dx^2} = y''$$

تفاضل من مرتبة ثالثة:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d^3x}{dx^3} = y'''$$

تفاضل من مرتبة n:

$$\frac{d^n x}{dx^n} = y^n$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$dx = -a \sin t \, dt$$

$$dy = b \cos t \, dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t \, dt}{-a \sin t \, dt} = \frac{b \cos t}{-a \sin t}$$

$$= -\frac{b}{a} \cos t$$

انتهت الطاعزة

الزميلة:

«Alissar Deeb»

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z