كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

خاصة: الدوال العكسية ومشتقاتها:

(1) دوال المثلثية العكسية ومشتقاتها:

(a) $y = \sin x$

$\Leftrightarrow f(x) = \sin x$

هي دالة دورية دورها 2π منطلقها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ومجالها $[-1,1]$

ودالتها العكسية:

$y = \arcsin x$

منطلقها $[-1,1]$ ومجالها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

لإيجاد مشتق الدالة العكسية $\sin x$

نعلم: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$

بأخذ النهاية:

$y'_x \times x'_y = 1$

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ★

نفرض أن الدالة $y = \arcsin x$ العكسية:

$x = \sin y$

من ★

$y'_x = \frac{1}{\cos y}$

$\cos y = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

نعوض:

$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

نحفظ:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(b) $y = \cos x$

$\Leftrightarrow f(x) = \cos x$

هي دالة دورية دورها 2π ومنطلقها $[0, \pi]$

ومجالها $[-1,1]$

ودالتها العكسية: $y = \arccos x$

منطلقها $[0, \pi]$ ومجالها $[-1, 1]$

* مشتق دالتها:

$y = \cos x$

$y = \arccos x$

$x = \cos y$

من *

$y'_x = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y}$

$\sin y = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 x$

$y'_{(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

حفظ

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \tan x$ (C)

$\Leftrightarrow f(x) = \tan x$

في حالة حصرية دومها منطلقها π

ومجالها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

دالتها العكسية:

$y = \arctan x$

منطلقها $]-\infty, +\infty[$ ومجالها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

* مشتق دالتها:

$y = \tan x$

$y = \arctan x$

$x = \tan y$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

من *

$y'_x = \frac{1}{(\tan y)'}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 y}$

$y'_x = \frac{1}{1+x^2}$

حفظ

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

بالنفس الشكل:

حفظ

$(\operatorname{arc}\cot^2 x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(1) الدوال العكسية الزائدة ودالها العكسية ومشتقاتها:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

a) الدالتان $sh(x)$, $ch(x)$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(ch(x))' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

بند

$$(ch(x))' = sh(x)$$

$$(sh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

بند

$$(sh(x))' = ch(x)$$

مشتقات $ch(x)$, $sh(x)$ من الشكل

$y = ch(x)$

$y = \text{arc}\,ch(x) \Rightarrow x = chy$

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ * من

$y = sh(x)$

$y = \text{arc}\,sh x \Rightarrow x = shy$

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ * من

$$y'_x = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{ch(x)}$$

من:

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$ch^2 x = 1 + sh^2 x$

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'_x = \frac{1}{(chy)'} = \frac{1}{sh(x)}$$

من العلاقة الأساسية للدالة الزائدية:

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$sh^2(x) = -1 + ch^2(x)$

نجد

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{ch^2 y - 1}}$$

بند

$$(\text{arc}\,ch(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= 1 - \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - CTh^2 x$$

$$(CTh^2 x)' = 1 - CTh^2 x$$ حفظ

Th x , CTh x اشتقاق العكسي

$y = Th x$

$y = arc\,Th(x)$

$\Rightarrow x = Th y$

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ← صيغة

$$y'_x = \frac{1}{1 - Th^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(arc\,Th x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$ حفظ

بالنفس الشكل:

$y = arc\,CTh x$ حيث

$x = CTh y$

$y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ← صيغة

$$(arc\,sh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$ حفظ

البرهان: Th(x) , CTh(x) (b)

$$Th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$CTh(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(Th(x))' =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - Th^2 x$$

$$(Th x)' = 1 - Th^2(x)$$ حفظ

$$(CTh(x))' =$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$(arc\ cos cx)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'_x = \frac{1}{1-cTh^2x} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(arc\ cTh x)' = \frac{1}{1-x^2}$$ ضط

تطبيقات الاشتقاق:

أولاً: دراسة تغير الدوال باستخدام المشتق:

(1) معادلة المماس:

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

ميل المماس:

$$(y-y_0) = m(x-x_0)$$

$$m = \frac{(x-x_0)}{(y-y_0)}$$

$f'(x_0)$

مثال:

أوجد معادلة المماس في نقطة $y=8$ للدالة $y = x^3$

$$y - 8 = 3x^2(x-2)$$

عند الصفر $x=2$

$$y - 8 = 12(x-2)$$

(2) نظرية رول: بفرض أن الدالة $y = f(x)$ المعرفة والمستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ ومقابل الاشتقاق فيه توجد نقطة $c \in]a,b[$ بحيث $f(a) = f(b)$ ، $f'(c) = 0$

نتيجة: إن مشتق الدوال المقلوبة العلاقة الرائدة:

$$\left.\begin{array}{l} \sec x = \frac{1}{\cos x} \\ \cos cx = \frac{1}{\sin x} \end{array}\right\}$$ الدوال المقلوبة

$$(sec'x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow = \tan x \cdot \sec x$$

$$(cosc'x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$\Rightarrow = -\cot x \cdot \cos cx$$

مشتقات العكسية:

$$(arc\ sec'x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة الآتية:

$f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 1$

على المجال $[-1,1]$ ؟

يجب أن يتحقق الشرط

$f(a) = f(b)$

$f(1) = f(-1)$

$2 = 2$

يمكن تطبيق نظرية رول:

$f'(x) = 12x^2 + 2x - 4$

$f'(x) = 0$

$12x^2 + 2x - 4 = 0$

$6x^2 + x - 2 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{1}{2} \in]a,b[=]-1,1[$

$x_2 = \frac{2}{3} \in]-1,1[$

(3) نظرية كوشي:

نفرض لدينا دالتين f و g معرفتين ومستمرتين على المجال $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$ حيث

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$g(b) \neq g(a)$ حيث

وتوجد نقطة $c \in]a,b[$

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية كوشي للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ على المجال $[1,4]$ إذا أمكن ذلك أوجد قيمة c التي تحقق الشرط كوشي:

الحل:

$g(x) = \sqrt{x}$

$g(1) = \sqrt{1} = 1$ $\quad g(4) = \sqrt{4} = 2$

$f(x) = x^2$

$f(1) = 1$ $\quad f(4) = 16$

$g(1) \neq g(4)$

تحقق شرط كوشي

توجد قيمة $c \in]1,4[$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{16-1}{2-1} = \frac{15}{1}$$

$4x^{\frac{3}{2}} = 15$

$\Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}$

$\Rightarrow x = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.21$

$c \in]1,4[$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) نظرية لاغرانج:

بفرض لدينا دالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$

بحيث:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

حيث $f(b) \neq f(a)$

عندئذ توجد $C \in]a,b[$ تحقق الشرط.

مثال:

هل يمكن تطبيق نظرية لاغرانج للدالة $f(x) = \ln(x)$ على $[1,e]$

إذا أمكن أوجد قيمة C إذا تحقق الشرط:

$f(1) \neq f(e)$

$\ln(1) \neq \ln(e)$

يمكن تطبيق لاغرانج

لنوجد قيمة C:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \approx \frac{1}{1,7}$$

$$x = 1,7 \Rightarrow C = 1,7$$

$$C \in]1,2,7[$$

انتهت المحاضرة.

«Alissar Deeb»

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة