كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الثانية**

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضرة : الثامنة/نظري/دكتورة

Syrian Arab Republic
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Tartous University
Faculty of Science
Department of chemistry

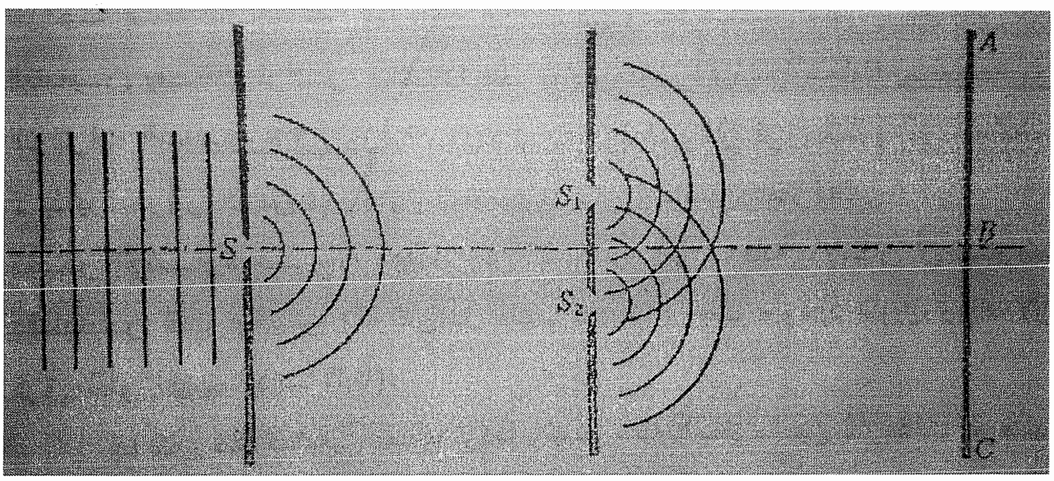
الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

المحاضرة الثامنة لمقرر الاهتزازات والأمواج لطلاب السنة الثانية كيمياء- د. سمر عمران

التداخل والمنابع المترابطة (المتماسكة): لقد تعلمنا بأنَّ الضوء يعد أساساً موجة، وسنفترض بأنّنا نتعامل مع الضوء الوحيد اللون عند دراسة وتحليل ظاهرتي التداخل والانعراج.

عندما يحدث التداخل فإنَّ الموجة الناتجة في أية نقطة وفي أية لحظة زمنية تكون خاضعة لمبدأ التراكب (الذي تمّ شرحه سابقاً)، ويمكن رؤية ظواهر التداخل بسهولة عندما نراكب (نجمع) موجات جيبية لها تردد وحيد وطول موجة وحيد.

يُظهر الشكل (1) منبعين متماثلين للأمواج وحيدة اللون. يولد المنبعان أمواجاً لها السعة ذاتها وطول الموجة ذاته، وهذان المنبعان متوافقان بالطور بشكل دائم أي يهتزان بتردد واحد. يمكن لهذان المنبعان أن يكونا مكبرا صوت يتحكم بهما مضخم واحد أو أنتينا راديو يتحكم بهما جهاز إرسال واحد، أو شقان صغيران في شاشة عاتمة أُضيئت بنفس منبع الضوء الوحيد اللون. نقول عن المنابع الوحيدة اللون التي تهتز بالتردد نفسه والتي تتصف بعلاقة طور ثابتة أنها **منابع متماسكة أو مترابطة.** سوف نستخدم أيضاً مصطلح الأمواج المتماسكة (أو من أجل الأمواج الضوئية مصطلح الضوء المتماسك أو المترابط) للدلالة على أنَّ هذه الأمواج تصدر من منبعين يهتزان بالتردد نفسه وفرق الطور بينهما ثابت لا يتغير مع الزمن.



الشكل (1): المنبعان الضوئيان المترابطان.

إذا كانت الأمواج الصادرة من منبعين مترابطين عرضانية كالأمواج الكهرطيسية، فإننا سنفترض أيضاً أنَّ للاضطرابات الموجية المتولدة من هذين المنبعين الاستقطاب ذاته (أي أنها تقع على امتداد الخط ذاته). فعلى سبيل المثال يمكن للمنبعين المبينين في الشكل (1) أن يكونا أنتينا راديو على شاكلة عمودين طويلين موجهين بشكل موازي للمحور Z (بشكل عمودي على مستوي الشكل)، هذا يعني أنَّ الأمواج المتولدة عن هذين الأنتينين Antennas يملكان في أية نقطة من المستوي xy حقولاً كهربائية $\vec{E}$ وفق المركبة Z فقط. إذاً نحتاج إلى تابع سلمي وحيد فقط لوصف كل موجة، وهذا يجعل تحليل الظاهرة المدروسة لدينا أكثر سهولة.

التداخل البناء والتداخل الهدام الناتج عن تراكب الأمواج الصادرة عن شقين:

شرحنا سابقاً في المحاضرة الأولى أنَّ التداخل البناء يحدث في النقاط التي يكون عندها فرق المسير مساوياً لعد صحيح من الأطوال الموجية mλ حيث $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$، وبالتالي تتشكل لدينا مناطق مضيئة (أهداب مضيئة) وتتحقق العلاقة التالية:

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad (1)$$

وبشكل مماثل يحدث التداخل الهدّام مشكلاً مناطق مظلمة التي من أجلها فرق المسير يساوي عدد فردي من نصف الأطوال الموجية، وتتحقق العلاقة التالية:

$$d \sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (2)$$

هذا يعني أنَّ شكل التداخل على الحاجز هو عبارة عن تعاقب للأهداب المضيئة والمظلمة ويكون الهدب المركزي مضيئاً يوافق $m = 0$ في المعادلة (1)، وهذه النقطة في الحاجز متساوية البعد عن الشقين.

يمكننا أن نستنتج علاقة لتحديد مواقع مراكز الشرائط المضيئة على الحاجز. لتكن y_m بعد مركز شكل التداخل (θ = 0) عن مركز الشريط المضيء ذو الرقم m و θ_m القيمة الموافقة للزاوية θ، عندئذ نجد:

$$y_m = R\ \tan\theta_m \qquad (3)$$

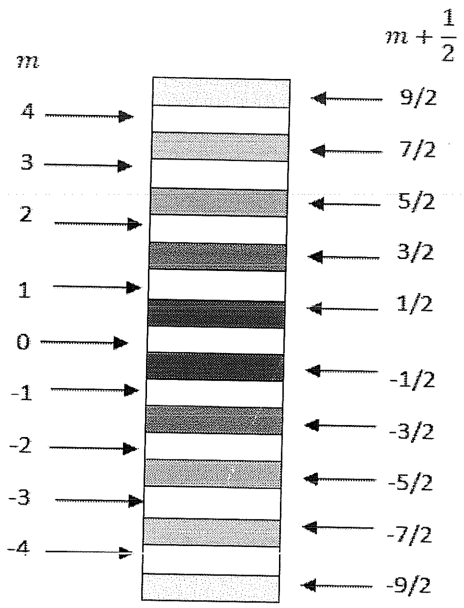
في تجارب كهذه تكون المسافات y_m أقل بكثير من المسافة الفاصلة بين الشقين والحاجز R، ولهذا السبب تكون الزاوية θ_m صغيرة جداً، وبالتالي $\tan\theta_m \approx \sin\theta_m$، ومنهُ:

$$y_m = R\ \sin\theta_m \qquad (4)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (1)، نجد:

$$\frac{y_m}{R} = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow y_m = R\,\frac{m\lambda}{d} \qquad (5)$$

وهي علاقة التداخل البناء في تجربة يونغ.



الشكل (2): الأهداب المضيئة والمظلمة.

يمكننا قياس كل من R,d بالإضافة إلى مراكز الأهداب المضيئة y_m، ولذلك تؤمن هذه التجربة لنا قياسات مباشرة لطول الموجة λ. وفي الواقع كانت تجربة يونغ أول تجربة تقيس طول الموجة للضوء بشكل مباشر.

تتناسب المسافة الفاصلة بين الأهداب المضيئة في شكل التداخل عكسياً مع المسافة الفاصلة بين الشقين d. فكلما اقترب الشقين من بعضهما كلما ابتعدت أهداب التداخل عن بعضها البعض والعكس بالعكس.

تطبيق: في تجربة تداخل موجتين بواسطة شقين يبعدان عن بعضهما بعضاً مسافة 0.2mm ويبعدان عن الحاجز مسافة 1m، يبعد الهدب المضيء الثالث m=3 عن الهدب المركزي مسافة 9.49mm، أوجد طول موجة الضوء المستخدم؟

الحل: نطبق المعادلة (5) من أجل λ من أجل الحالة الموافقة للرتبة m=3 :

$$\lambda = \frac{y_m\, d}{mR} = \frac{(9.49\times10^{-3}m)(0.2\times10^{-3}m)}{(3)(1m)} = 633nm \text{ (اللون الأحمر)}$$

يوافق هذا الهدب المضيء الرتبة $m = -3$ أيضاً.

أعد المسألة السابقة إذا علمت أنّ الهدب المضيء الثالث يبعد عن الهدب المركزي مسافة $y_3 = y_m =$ $7.5mm$ ماذا تستنتج؟

الحل:

$$\lambda = \frac{y_m\, d}{mR} = \frac{(7.5\times10^{-3}m)(0.2\times10^{-3}m)}{(3)(1m)} = 500nm \text{ (اللون الأخضر)}$$

نستنتج أنّ تباعد الأهداب يتناسب طرداً مع طول موجة الضوء المستخدم، وتكون متباعدة أكثر من أجل الضوء الأحمر منها من أجل الضوء الأخضر.

تطبيق: عادةً ما تُستخدم أزواج أو صفوف من الأنتينات لإصدار أنماط الإشعاع المطلوبة.ادرس أنتينين متماثلين يبعدان مسافة 400m عن بعضهما ويصدران أمواجاً راديوية باتجاه محدد وترددها 1500KHz (الموافقة للنهاية البعيدة لحزمة الإرسال AM) ويهتزان على توافق في الطور. أوجد الاتجاهات التي من أجلها تكون الشدات أعظمية على مسافات أكبر بكثير من 400m؟

الحل: بما أنّ الموجة المحصلة تُرصد عند مسافات أكبر بكثير من 400m، يمكننا تطبيق المعادلة (1) $d\sin\theta = m\lambda$ بهدف معرفة الاتجاهات الموافقة للشدات العظمى، أي معرفة قيم الزاوية θ التي من أجلها فرق المسير يساوي الصفر أو عدد صحيح من الأطوال الموجية:

$$f = \frac{C}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{C}{f} = \frac{3\times10^8}{1500\times10^3} = 200m$$

وتعطي المعادلة (1) الموافقة للأهداب: $m = 0, m = \pm1, m = \pm2$ شدات أعظمية في الاتجاهات:

$$d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(200)}{400} = \frac{1}{2}m$$

من أجل $m = 0$ نجد $\sin\theta = 0$ ومنه $\theta = 0$

من أجل $m = \pm1$ نجد $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$ ومنه $\theta = \pm30^0$

من أجل $m = \pm2$ نجد $\sin\theta = \pm1$ ومنه $\theta = \pm90^0$

نلاحظ في هذا المثال أنَّ قيم m الأكبر من 2 أو الأقل من -2 تعطي قيم لـ $\sin\theta$ أكبر من 1 أو أصغر من -1 وهذا مرفوض. إذاً لا يوجد الاتجاه الذي من أجله فرق المسير يساوي ثلاثة أمثال أو أكبر من الأطوال الموجية، ولذلك ليس للقيم $m = \pm 3$ أو أكبر أي معنى في هذا التطبيق.

الاتجاهات التي من أجلها تكون الشدات أصغرية $\theta = \pm 14.5^0$ و $\pm 48.6^0$، لحلها نطبق العلاقة (2) ونحسب بنفس الطريقة .

شدة الإضاءة في أشكال التداخل:

وجدنا في الفقرة السابقة أماكن الشدات الأعظمية والأصغرية في أشكال التداخل الناتجة عن شقين متماثلين. لنوجد الآن الشدة في أية نقطة تقع في شكل التداخل. ولفعل ذلك نجمع حقلين كهربائيين جيبيين متغيرين مع الزمن (من منبعين) في نقطة P تقع في شكل الإشعاع أخذين بالحسبان فرق الطور بين الموجتين في النقطة P والناتج عن فرق المسير. الشدة تتناسب طرداً مع مربع سعة الحقل الكهربائي الناتج كما وجدنا في مقرر الكهرطيسية.

لحساب الشدة نفترض أنَّ للتابعين الجيبيين الموافقين لموجتين صادرتين عن منبعين السعة نفسها E وأنَّ الحقول $\vec{E}$ تقع على الخط نفسهُ (أي لهما نفس الاستقطابية) وهذا يفرض بدوره أنَّ المصدرين متماثلان وأنَّ فرق السعة الصغير جداً الذي يمكن أن ينشأ عن عدم تساوي فروق المسير مهمل (فالسعة تتناقص بازدياد البعد عن المنبع).

إذاً كل منبع يعطي من تلقاء نفسه شدة قيمتها في النقطة P تساوي $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2$ ، إذا كان المنبعان متوافقان في الطور تصل الأمواج إل النقطة P بفرق طور مقدارهُ يتناسب طرداً مع فرق المسير بينهما $(r_2 - r_1)$. فإذا رمزنا لزاوية الطور بين هذه الأمواج الواصلة إلى النقطة المدروسة بالرمز ϕ، يمكننا استخدام العلاقتين التاليتين للتعبير عن الحقلين الكهربائيين المتراكبين في P:

$$E_1(t) = E\cos(wt + \phi)$$

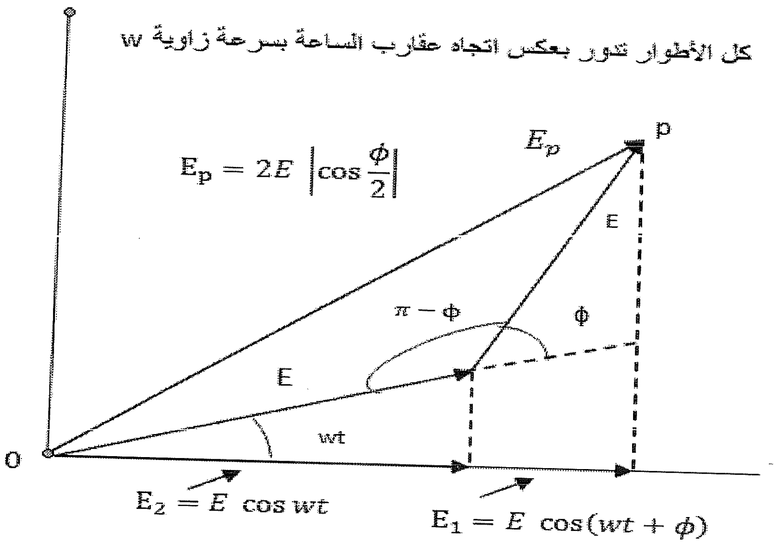
$$E_2(t) = E\cos(wt)$$

وتركيب هذين الحقلين في P هو تابع جيبي بسعة ما E_p، تتعلق بالمقدار E وبفرق الطور ϕ.

سنعمل في البداية على إيجاد E_p عند معرفة كل من E و ϕ، ثم نوجد الشدة للموجة الناتجة (المحصلة) التي تتناسب مع E_p^2، وأخيراً، نربط فرق الطور بفرق المسير الذي يتعين من هندسة الحالة المدروسة.

لجمع تابعين جيبيين بينهما فرق في الطور (نطبق المخطط الطوري نفسه الذي استخدمناه عند دراسة الحركة التوافقية البسيطة، كما في مقرر الاهتزازات والأمواج، والجهود والتيارات في دارات التيار المتناوب AC، كما في مقرر الكهرباء والمغناطيسية).

في الشكل التالي: تُعد E_1 المركبة الأفقية للموجة الصادرة عن المنبع S_1 و E_2 المركبة الأفقية للموجة الصادرة عن المنبع S_2. يوضح الشكل أنَّ لكلتا الموجتين السعة نفسها E لكن E_1 تتقدم بالطور عن E_2 بمقدار الزاوية ϕ. وكلتا متجهتي الموجتين تدوران باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة w، ثم أنَّ مجموع المساقط على المحور الأفقي في أية لحظة زمنية يعطي القيمة اللحظية للحقل الكلي E في النقطة P. وهكذا نجد أنَّ المتجهة E_p تمثل سعة الموجة الجيبية المحصلة في النقطة P وهي المجموع المتجه لمتجهتين.



الشكل (3)

ولإيجاد E_p نطبق قانون الجيوب وتطابق المثلثات $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$

$$E_p^2 = E^2 + E^2 - 2E^2\cos(\pi - \phi)$$

$$E_p^2 = E^2 + E^2 + 2E^2\cos(\phi)$$

وباستخدام المطابقة $1 + \cos\phi = 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$ نحصل على العلاقة:

$$E_p^2 = 2E^2(1 + \cos(\phi)) = 4E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_p = 2E\left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right| \qquad (6)$$

بمقدورنا الحصول على هذه النتيجة من دون استخدام مخطط الطور.

عندما يكون فرق الطور بين الموجتين معدوماً $\phi = 0$، فإنَّ $E_p = 2E$.

عندما يساوي فرق الطور بين الموجتين نصف دورة تماماً $\phi = \pi\, rad = 180^0$، تصل الموجتان على تعاكس في الطور تماماً، وبالتالي $E_p = 0$.

وهكذا نجد أنَّ تراكب موجتين جيبيتين لهما التردد نفسه والمطال نفسه، ولكن بينهما فرق في الطور، يعطي موجة جيبية لها التردد نفسه ولكن السعة تقع بين القيمتين الصفر وضعف سعة كل من الموجتين فيما لو كانتا معزولتين تبعاً لفرق الطور بينهما.

الآن سوف نوجد الشدة في النقطة p، ومن أجل ذلك نتذكر أنَّ الشدة تساوي القيمة الوسطية لمتجهة بوينتنغ S_{av}.

فمن أجل موجة جيبية تُمثل حقلاً كهربائياً سعته E_p، نستبدل السعة E_{max} في علاقة الشدة التالية بالقيمة E_p:

$$I = S_{av} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 C E_{max}^2$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 C E_p^2 \qquad (7)$$

يتجلى المعنى الحقيقي لهذه العلاقات في أنَّ شدة الموجة المحصلة تتناسب طرداً مع E_p^2 .

وعندما نعوض المعادلة (6) في (7) نجد:

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 C\ 4E^2 cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2\varepsilon_0 C E^2 cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad (8)$$

ومن أجل الحالة الخاصة الموافقة لكون فرق الطور بين الموجتين المتراكبتين في النقطة p يساوي الصفر، نجد أنَّ الشدة العظمى I_0 تساوي:

$$I_0 = 2\varepsilon_0 C E^2 \qquad (9)$$

لاحظ أنَّ الشدة الأعظمية أكبر بأربع مرات وليس بمرتين من الشدة (7) الصادرة من كل منبع معزول.

بتعويض العلاقة الأخيرة للشدة I_0 في المعادلة (8) بمقدورنا التعبير عن شدة الموجة المحصلة في أية نقطة تقع في شكل التداخل بدلالة الشدة العظمى I_0 :

$$\boxed{I = I_0 cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \qquad (10)$$

نلاحظ أنَّ $I = I_0$ من أجل بعض الزوايا و $I = 0$ من أجل الزوايا الأخرى.فإذا أخذنا القيمة الوسطية للعلاقة (10) على كامل فروق الطور الممكنة، ينتج لدينا من العلاقة (9) $\left\langle cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right\rangle =$) $\frac{I_0}{2} = \varepsilon_0 CE^2$ $\frac{1}{2}$)، وهذاما يساوي ضعف الشدة الصادرة عن كل منبع معزول (لوحده) تماماً. إنَّ الطاقة الكلية الصادرة عن المنبعين لا تتغير نتيجة لعمليات التداخل وإنما يُعاد توزيعها.

فرق الطور وفرق المسير:

المطلوب الآن إيجاد فرق الطور بين الحقلين الكهربائيين في أية نقطة p. نعلم أنَّ فرق الطور يتناسب طرداً مع فرق المسير الناتج بين المنبعين. عندما يكون فرق المسير مساوياً لطول موجة واحد، فإنَّ فرق الطور يوافق دورة كاملة، أي $\phi = 2\pi\, rad = 360^0$

عندما يكون فرق المسير مساوياً لنصف طول الموجة، فإنَّ فرق الطور يوافق نصف دورة، أي $\phi = \pi\, rad =$ 180^0، وهكذا دواليك.

هذا يعني أنَّ نسبة فرق الطور إلى 2π يساوي نسبة فرق المسير إلى طول الموجة:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

ولهذا السبب يمكننا القول بأنَّ فرق المسير بين موجتين في النقطة P يُسبب فرقاً في الطور تُعطى قيمته بالعلاقة:

$$\phi = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = K(r_2 - r_1) \qquad (11)$$

حيث K العدد الموجي (wave number) .

إذا كان الوسط المحيط بين المنبعين والنقطة p أية مادة أخرى غير الخلاء، يجب أن نستبدل طول الموجة في المادة في المعادلة (11)، وإذا كان للمادة قرينة انكسار ، فإنَّ:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad , \quad K = nK_0$$

حيث λ_0 و K_0 طول الموجة والعدد الموجي في الخلاء على الترتيب.

وأخيراً إذا كانت النقطة p بعيدة جداً عن المنبعين مقارنة مع المسافة الفاصلة بين المنبعين d، فإنَّ فرق المسير يُعطى بالعلاقة:

$$r_2 - r_1 = d \sin\theta$$

وبالاستفادة من هذه المعادلة والمعادلة (11) نجد:

$$\phi = K(r_2 - r_1) = kd \sin\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \qquad (12)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (10) نحصل على:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}Kd\, sin\, \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} sin\, \theta\right) \qquad (13)$$

وهي الشدة من أجل المنابع البعيدة جداً عن شكل التداخل.

ونحصل على الاتجاهات الموافقة للشدة الأعظمية عندما يساوي $\cos(\frac{\pi d}{\lambda} sin\, \theta) = \pm 1$ أي عندما:

$$\frac{\pi d}{\lambda} sin\, \theta = m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\dots)$$

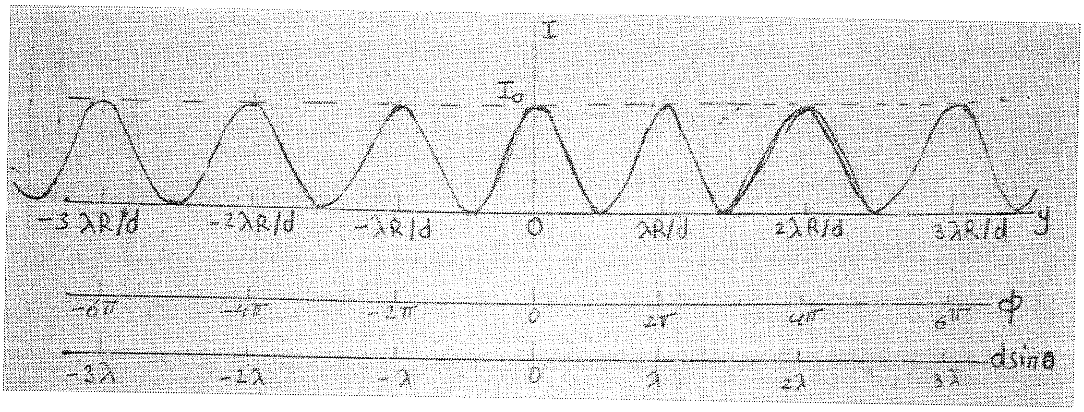
أو: $$d \sin\theta = m\lambda$$

وهي متوافقة مع المعادلة (1). يمكننا الحصول على المعادلة (2) أيضاً من أجل الاتجاهات الموافقة للشدة الأصغرية من المعادلة (13).

يمكننا وصف مواقع الأهداب على الحاجز بالإحداثية y: فمواقع الأهداب المضيئة تُعطى بالمعادلة (5) حيث $y \ll R$.

في تلك الحالة كان $\sin\theta \approx \frac{y}{R}$، إذاً نحصل على العلاقات التالية لتعيين شدة الإضاءة في أية نقطة تقع على الحاجز كتابع للبعد d .

$$\left.\begin{aligned} I &= I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} sin\, \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda R}\right) \\ I &= I_0 \cos^2\left(\frac{Kd}{2} sin\, \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{Kdy}{2R}\right) \end{aligned}\right\}$$



الشكل (4): توزع الشدة في شكل التداخل الناتج عن شقين متماثلين.

y: بعد النقطة المدروسة في شكل التداخل عن المركز $(y = 0)$.

ϕ: فرق الطور بين موجتين في كل نقطة من شكل التداخل.

$d\,sin\,\theta$: فرق المسير بين منبعين في كل نقطة من شكل التداخل.

يُظهر الشكل (4) رسماً بيانياً للمعادلتين السابقتين، يمكننا مقارنة هذا الشكل مع اللقطة الفوتوغرافية (2). كل القمم في الشكل (4) تملك الشدة ذاتها، في حين أنها تخفت في الصورة (2) كلما ابتعدنا عن المركز.

تطبيق: افترض أنَّ أنتينا إرسال الأمواج الراديوية يبعدان عن بعضهما البعض مسافة 10m، وأنَّ تردد الإرسال ازداد حتى $f = 60MHz$، ولنفرض أنَّ الشدة $I_0 = 0.02\,W/m^2$ على بعد 700m في النقطة الواقعة على متوسط الخط الفاصل بين الأنتينين المتماثلين وفي الاتجاه $\theta = 0$. أوجد عند هذا البعد:

1- الشدة في الاتجاه $\theta = 4^0$.

2- الاتجاه الموافق لكون الشدة تساوي $\frac{1}{2}I_0$.

3- الاتجاهات الموافقة لانعدام الشدة.

الحل: تتضمن هذه المسألة توزيع الشدة كتابع للزاوية، وبما أنَّ البعد المساوي 700m والذي يفصل الأنتينين عن النقطة التي تُقاس عندها الشدة أكبر بكثير من البعد $d = 10m$ فيما بينهما فإنَّ سعات الأمواج الصادرة عن المنبعين متساوية تقريباً. ولهذا السبب يمكننا استخدام المعادلة (13) لربط الشدة I بالزاوية θ.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\,m/s}{60 \times 10^6 Hz} = 5m$$

إذاً المسافة الفاصلة بين الأنتينين d تساوي مثلي طول الموجة تماماً، ولذلك فإنَّ: $\frac{d}{\lambda} = \frac{10}{5} = 2$ والمعادلة (13) تصبح من الشكل:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} sin\,\theta\right) = I_0 \cos^2((2\pi\, rad) sin\,\theta)$$

(a): عندما $\theta = 4^0$، ينتج لدينا:

$$I = I_0 \cos^2\big((2\pi\, rad) \sin 4^0\big) = 0.82\, I_0 = 0.82\, \left(0.02\, \frac{w}{m^2}\right)$$

$$I = 0.016\, w/m^2$$

(b): تتحقق المساواة $I = \frac{I_0}{2}$ عندما يساوي $\cos ine$ في المعادلة (13) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$، وأصغر الزوايا التي يحدث عندها ذلك يوافق:

$$2\pi\ \sin\theta = \pm\frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta = \pm\frac{1}{8} = \pm 0.125 \quad\Rightarrow\quad \theta = \pm 7.2^0$$

(c): تساوي الشدة الصفر عندما:

$$\cos[(2\pi\, rad) \sin\theta] = 0$$

وهذا يحدث عندما: $2\pi \sin\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots\dots$

أو عندما: $\sin\theta = \pm 0.25\,, \pm 0.75\,, \pm 1.25, \dots\dots\dots$

قيم $\sin\theta$ الأكبر من الواحد لا معنى لها ولذلك فإنَّ الجواب ينحصر في $\theta = \pm 14.5^0, \pm 48.6^0$