كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الثانية**

المادة : اهتزازات وامواج

المحاضرة : الثالثة/نظري/دكتورة

Syrian Arab Republic
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Tartous University
Faculty of Science
Department of chemistry

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

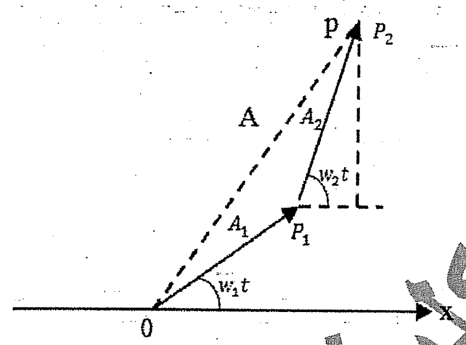
المحاضرة ~~الثانية~~ الثالثة لمقرر الاهتزازات والأمواج لطلاب السنة الثانية كيمياء - د. سمر عمران

الحركات الاهتزازية

1-5-2: تركيب حركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما المنحى نفسه وتواترين زاويين مختلفين:

تعتبر الحالة التي يكون فيها للحركتين الجيبيتين المنحى نفسه ولكن بتواترين زاويين مختلفين من الحالات الهامة. ولكن لتسهيل الدراسة نأخذ الحالة التي يكون فيها $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$، عندئذ تُوصف الحركتان بالمعادلتين:

$$x_1 = A_1 \cos(w_1 t) \quad , \quad x_2 = A_2 \cos(w_2 t) \qquad (24)$$



الشكل(7): تراكب حركتين اهتزازيتين جيبيتين بتواترين زاويين مختلفين

إنَّ الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{OP_1}$ و $\overrightarrow{OP_2}$ في الشكل (7) تساوي الفرق $w_1 t - w_2 t = (w_1 - w_2)t$ حيث $(w_1 > w_2)$ ليست ثابتة، وعليه فإنَّ قياس المتجه المحصل $\overrightarrow{OP}$ ليس ثابتاً، كما أنَّهُ لا يدور بسرعة زاوية ثابتة، وبالتالي فإنَّ الحركة المحصلة $x = x_1 + x_2$ ليست جيبية إلا أنَّ سعة الحركة المحصلة كما يبدو في الشكل (7) تساوي:

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(w_1 - w_2)t}$، وتتغير A بين القيمتين $(A = A_1 + A_2)$ عندما $(w_1 - w_2)t = 2n\pi$، و $A = |A_1 - A_2|$ عندما $(w_1 - w_2)t = (2n+1)\pi$، يُعطى دور وتواتر اهتزازها بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{w_1 - w_2} \Rightarrow \frac{w_1 - w_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2 \qquad (25)$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أنَّ تواتر الاهتزاز الناتج يساوي الفرق بين التواترين للحركتين المتداخلتين.

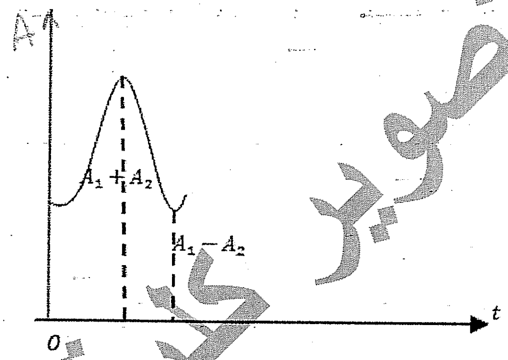
يبين الشكل (8) تغيّر السعة A بدلالة الزمن، وتنشأ هنا الحالة الموافقة لرنانتين تهتزان في الوقت نفسه بتواترين زاويين متقاربين ومختلفين في موضعين متجاورين. فنلاحظ عندئذ تأرجحاً في الشدة يسمى الخفقان الذي يُعزى إلى تغير السعة كما هو مبين في الشكل (9). وعندما تتساوى السعتان $A_1 = A_2$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$x = x_1 + x_2 = \mathrm{A}_1(\cos(w_1 t) + \cos(w_2 t))$$

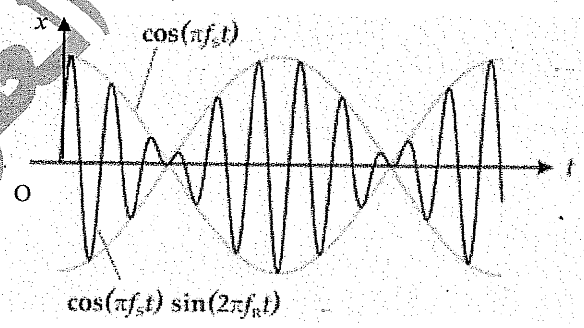
$$= 2\mathrm{A}_1 \cos\left[\frac{w_1+w_2}{2}\right] t.cos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t = Acos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t \qquad (26)$$

تُبين المعادلة (26) أنَّ للحركة المحصلة لاهتزاز السعة تواتر زاوي $w = \frac{w_1+w_2}{2}$ يدعى التواتر الزاوي الوسطي وسعة مكيّفة بتواتر تكيّف $\frac{w_1-w_2}{2}$ تساوي إلى:

$$A = 2\mathrm{A}_1 \cos\left[\frac{w_1-w_2}{2}\right] t \qquad (27)$$



الشكل(8): تغير السعة والخفقان.



الشكل(9): تكيّف السعة وظاهرة الخفقان.

~~ويمكن أن نحصل على هذه النتيجة مباشرة من المعادلة~~

[illegible]

يُبين الشكل (9) تغير $x(t)$ بدلالة الزمن (t) حيث يُشير فيه المنحني المتقطع إلى تكيّف السعة، ونشير أيضاً إلى أننا نحصل على ظاهرة الخفقان عندما نركب موجتين لهما ترددان مختلفان تنتشران في الاتجاه نفسه ولهما الطور نفسه ونحصل في هذه الحالة على تغيرات متناوبة في السعة (الشدة) ونقول أنَّ هناك تكيفاً، ولهذا الموضوع أهمية كبيرة في الإرسال الراديوي والتلفزيوني. تجدر الإشارة هنا إلى الحالة التي تنتشر فيها موجتان أحدهما واردة والأخرى منعكسة، فيمكن البرهان أننا نحصل منهما على موجة محصلة لها نفس التواتر الزاوي ولكن بسعة متغيرة، ويتشكل عليها عقد وبطون وهذا ما يسمى الأمواج المستقرة، وكلما ازداد عدد العقد ازداد الاهتزاز وتقوست الموجة، وازدادت طاقتها، وهذا ما نجده عند دراسة تشكل الأمواج في الأوتار أو المجاوبة الليزرية.

2– الحركة الاهتزازية المتخامدة:

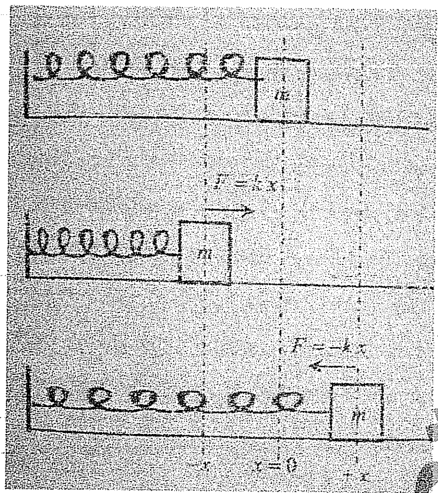
لقد اعتبرنا في دراسة الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة في الفقرات السابقة أنَّ الاهتزاز حرّ وغير متخامد وهو الاهتزاز الحاصل من إزاحة الجسيم قليلاً عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الإرجاع الناتجة عن خاصية المرونة فقط، دون أن يعاني أي مقاومة خارجية أو ضياع في الطاقة مهما كان شكله، ونتيجة لذلك فإنَّ سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني أنَّ الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن، ولكن في الطبيعة لا وجود للاهتزازات المستمرة التي إذا بدأت لا تنتهي، وأنَّ مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماماً وأنَّ أي مهتز حقيقي لا بد أن يعاني شيئاً من الفقدان في الطاقة بشكل أو بآخر ونتيجة لذلك فإنَّ سعة الحركة الاهتزازية تتخامد تدريجياً وهي تمثل الحالة الأكثر واقعية.

2–1: معادلة الحركة الاهتزازية المتخامدة في نظام ميكانيكي:

نعتبر جملة ميكانيكية مهتزة مكونة من كتلة مربوطة بنابض مُثبّت إلى جدار الشكل (10)، عندما تُزاح الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x تظهر قوة إرجاع مقدارها $F = -kx$ وعندما تترك الكتلة تتحرك للعودة إلى موضع توازنها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة عن الاحتكاك أو اللزوجة المائع ومقدارها $\acute{F} = -\lambda v$، حيث λ ثابت يدعى بعامل مقاومة الوسط، v السرعة، وإشارة السالب تعني أنَّ القوة تُعاكس

اتجاه السرعة النسبية للكتلة المهتزة، وبالتالي القوى المؤثرة على الكتلة m المتحركة في أية لحظة زمنية تساوي إلى: $-kx - \lambda v$ وبتطبيق قانون نيوتن الثاني نجد أنَّ: $ma = -kx - \lambda v$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \qquad (28)$$



الشكل(10): قوى الاحتكاك والمقاومة للحركة الاهتزازية.

بعد تقسيم طرفي المعادلة السابقة على m وافتراض أنَّ $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ ويسمى عامل تخامد الجملة، ولدينا أيضاً $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ التواتر الزاوي الطبيعي في حال غياب التخامد، تصبح معادلة الحركة بالشكل التالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0 \qquad (29)$$

المعادلة (29) معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية، تصف الحركة الاهتزازية الحرّة المتخامدة لجملة (النابض– ثقل)، أو لأي جملة ميكانيكية معرّفة بتواترها الزاوي الطبيعي w_0 وعامل تخامدها γ.

نظراً لعدم إمكانية إجراء تكامل مباشر للمعادلة (29)، لذلك يجب البحث عن الحلّ المناسب بطريقة أخرى، ومن شكل المعادلة يتبين أنَّ الحل المطلوب يجب أن يكون تابعاً يعطي نفس الشكل الرياضي لكل الحدود فيها والتابع الرياضي الذي تتوفر فيه هذه الشروط هو التابع الأسي، لذلك ندخل متحول جديد y يرتبط بالمتحول x بعلاقة أسية من الشكل:

$$x = y\, e^{-\gamma t} \qquad (30)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} - \gamma y e^{-\gamma t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-\gamma t} \underbrace{- \gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t} - \gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t}}_{2\gamma\frac{dy}{dt}e^{-\gamma t}} + \gamma^2 y e^{-\gamma t}$$

والتعويض في المعادلة (29)

بأخذ التفاضل الأول والثاني للمعادلة (30) بالنسبة للزمن ثم الاختصار على المقدار $e^{-\gamma t}$ والإصلاح، نجد:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(w_0^2-\gamma^2)y=0 \qquad (31)$$

المعادلة (31) هي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية وحلها يتوقف على إشارة المقدار $w^2=(w_0^2-\gamma^2)$، ونميز هنا **أربع حالات:**

1- حالة انعدام التخامد وتتميز بكون المقدار $(\gamma=0)$: تعني هذه الحركة بأنَّ المقاومة التي يعانيها المهتز خلال حركته معدومة تماماً، وتقابل هذه الحالة الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة التي سبق ودرسناها. تأخذ المعادلة (31) الشكل التالي: $\frac{d^2y}{dt^2}+w_0^2y=0$ حلها من الشكل: $y=A\cos(w_0t+\varphi)$ ، ويُعطى دور الحركة الاهتزازية بالعلاقة: $T_0=\left(\frac{2\pi}{w_0}\right)$.

2- حالة التخامد الضعيف وتتميز بكون المقدار $(w^2=w_0^2-\gamma^2>0)$: تُعتبر هذه الحالة الحالة الأكثر حدوثاً في الطبيعة، والتي من أجلها تأخذ المعادلة (31) الشكل التالي:

$\frac{d^2y}{dt^2}+w^2y=0$ ، تصف هذه الحالة حركة اهتزازية جيبية بسيطة وحلها من الشكل:

$y=A\cos(wt+\varphi)$ ، ويُعطى دور الحركة الاهتزازية بالعلاقة: $T=\left(\frac{2\pi}{w}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2-\gamma^2}}$.

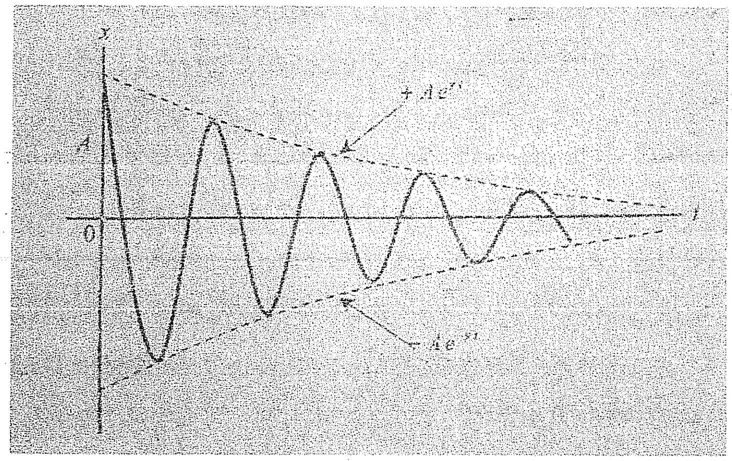
نلاحظ من المعادلة الأخيرة أنَّ دور الحركة الاهتزازية لحالة التخامد الضعيف أكبر من الدور الطبيعي لحالة انعدام التخامد $T_0=\left(\frac{2\pi}{w_0}\right)$ الذي يتم تحت تأثير قوى الإرجاع فقط. بتعويض قيمة المتحول y في

$y=A\cos(wt+\varphi)$

العلاقة (30) نحصل على حلّ المعادلة (29):

$$x=\boxed{Ae^{-\gamma t}}\cos(wt+\varphi) \qquad (32)$$

تُبين هذه الحالة أنَّ التخامد يقود إلى تناقص التواتر الزاوي للاهتزازات، وأنَّ السعة الفعالة للاهتزاز ليست ثابتة وتساوي: $\pm Ae^{-\gamma t}$ ، حيث يُلاحظ أنها مقدار متغير ويعتمد على عامل التخامد γ والزمن t، وهذا يشير إلى أنَّ السعة تتناقص أسياً مع الزمن حتى تنعدم عندما تكون قيمة t لا نهائية. يبين الشكل التالي علاقة الإزاحة بالزمن في الحركة الاهتزازية ذات التخامد الضعيف.



الشكل(11): تغير الإزاحة بدلالة الزمن في الحركة المتخامدة.

3- **حالة التخامد في وسط لزج (حالة التخامد الكبير جداً)، وتتميز بكون المقدار** $\left(w^2 = w_0^2 - \gamma^2 < 0\right)$: يُعاني المهتز في هذه الحالة مقاومة شديدة وتكون قيمة عامل التخامد γ كبيرة بالمقارنة مع التواتر الزاوي الطبيعي للمهتز w_0، وبالتالي يكون للمعادلة (31) حل عام من الشكل التالي:

$$y = A_1 e^{wt} + A_2 e^{-wt} \qquad (33)$$

حيث: $w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} < 0$، نعوض المعادلة (33) في المعادلة (30) نحصل على الحل العام بالشكل التالي:

$$x = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{wt} + A_2 e^{-wt}\right] \qquad (34)$$

حيث: A_1 و A_2 ثابتان حقيقيان يُعينان من شروط البدء، ويكون التواتر الزاوي في هذه الحالة w مقداراً تخيلياً (عقدياً) وبالتالي لا توجد اهتزازات، فالجسم الذي أُزيح عن وضع توازنه تُرك ليعود إلى وضع وضع توازنه دون أن يجتازه لمرة واحدة، والطاقة التي يفقدها الجسم في الاهتزازات المتخامدة يمتصها الوسط المحيط المُقاوم.

4- **حالة التخامد الحرج الموافقة للشرط** $\left(w^2 = w_0^2 - \gamma^2 = 0\right)$:

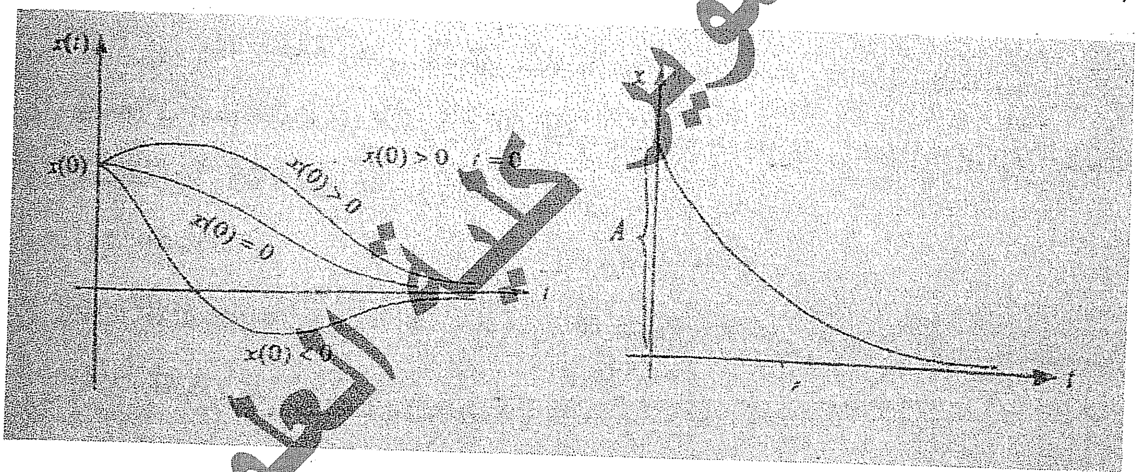
تُمثل هذه الحالة الخاصة الحدّ الفاصل بين سلوكين مختلفين تماماً للمهتز. **السلوك الأول:** هو سلوك اهتزازي ويبدأ عندما تقل قيمة عامل التخامد γ قليلاً عن قيمة w_0، وهذه الحالة تمت دراستها سابقاً في

الحالة الثانية. **السلوك الثاني:** هو سلوك غير اهتزازي ويحدث عندما تكون قيمة عامل التخامد γ مساوية أو تزيد عن قيمة w_0، والحالة $w_0 = \gamma$ تؤول المعادلة (31) إلى الشكل التالي: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$، وبإجراء تكاملين متتاليين على هذه المعادلة نحصل على حلها الذي يأخذ الشكل: $y = A_1 + A_2 t$، حيث A_1 و A_2 ثابتا تكامل حقيقيان يُعينان من شروط البدء للحركة وبالتعويض في المعادلة (30) نحصل على:

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t) \qquad (35)$$

يُلاحظ أنَّ هذا الحل يُمثّل الحالة الحدية، فعندما يزداد عامل التخامد مقترباً من القيمة w_0، أي عندما يقترب الزمن الدوري T للاهتزاز المتخامد من اللانهاية $T \to \infty$، إنَّ هذا الحل يصف حركة الجسم في الحالة الحرجة والتي تعني عودة الجسم إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية إذا ما أزيح عن موضع توازنه وتُرك حرّاً دون أن يصاحب ذلك شكل اهتزازي.

إنَّ لحالة الحركة الحرجة أهمية عملية كبيرة في تصميم أجهزة القياس العملية التي تتضمن أجزاء متحركة (المنظومات الميكانيكية) كالأذرع أو المؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية وغيرها.



الشكل(12): حركة الجسم في الحالة الحرجة.