كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : السادسة/نظري/

التكاملات المثلثية _ التكامل المحدد

❁ مكاملة بعض الأشكال الخاصة من الدوال المثلثية $I = \int R(\sin x , \cos x).dx$

- إذا كانت الدالة R تغير إشارتها إذا بدلنا كل $\cos x$ بالمقدار $-\cos x$ ، أي:
$R(\sin x , \cos x) = -R(\sin x , \cos x)$
عندئذٍ نفرض أن: $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x . dx$

مثال: أوجد التكامل: $I = \int \frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^2}.dx$

$$R(x) = \frac{cos^3x}{sin^2x}, \frac{(-\cos x)^3}{sin^2x} = -\frac{cos^3x}{sin^2x} = -R(x)$$

$R(x)$ تغير إشارتها إذا وضعنا $-\cos x$ مكان كل $\cos x$ لذا

نفرض أن: $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x . dx$ و بالتالي:

$$I = \int \frac{cos^2x . cosx}{sin^2x}.dx = \int \frac{(1 - cos^2x).cosx}{sin^2x}.dx$$

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^2}.dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + c$$

- إذا كانت الدالة R تغير إشارتها إذا بدلنا كل $\sin x$ بالمقدار $-\sin x$ ، أي:
$R(\sin x , \cos x) = -R(\sin x , \cos x)$
عندئذٍ نفرض أن: $t = cos\, x$ فيكون $dt = -\sin x . dx$

مثال: أوجد التكامل الآتي: $I = \int sin^5x. cos^2x . dx$

نلاحظ أن: $(-\sin x)^5. cos^2x = -sin^5x. cos^2x = -R(x)$ لذا نفرض أن: $t = cos\, x$

فيكون $dt = -\sin x . dx$ و منه:

$$I = \int (sin^2x)^2. cos^2x. \sin x. dx = \int (1 - cos^2x)^2. cos^2x. \sin x. dx$$

$$I = \int (1 - t^2)^2. t^2. (-dt) = -\int (1 - 2t^2 + t^4). t^2. dt = \int (-t^6 + 2t^4 - t^2). dt = -\frac{1}{7}t^7 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c$$

$$I = -\frac{1}{7}(\cos x)^7 + \frac{2}{5}(\cos x)^5 - \frac{1}{3}(\cos x)^3 + c$$

- إذا لم تتغير إشارة الدالة R عند وضع $-cosx$ مكان كل $cosx$ و وضع $-\sin x$ مكان كل $\sin x$ ، عندئذٍ نستطيع أن نفرض أن: $t = tgx$ أو $t = sinx$

أو $t = cosx$

مثال: أوجد التكامل : $I = \int \frac{sin^4x}{cos^6x}.dx$

الدالة $R(x) = \frac{sin^4x}{cos^6x}$ لا تغير إشارتها عند وضع $-cosx$ مكان كل $cosx$ و وضع $-\sin x$ مكان كل $\sin x$ ، لذا نفرض أن: $t = tgx$ أي: $x = arctg\, t$ فيكون: $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ، من جهة ثانية نلاحظ: $\sin x = t.\cos x \Longrightarrow t = \frac{\sin x}{\cos x}$ و بالتعويض بالعلاقة: $sin^2x + cos^2x = 1$

و الإصلاح نجد: $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$

فيكون: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ و $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$I = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4 .\frac{dx}{cos^2x} = \int tg^4x.\frac{1}{cos^2x}.dx = \int t^4(1+t^2).\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int t^4.dt = \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{5}tg^5x + c$$

❃ التكاملات من النمط: $I = \int sin^nx.cos^mx.dx$ حيث: $n, m \in \mathbb{Z}$

نميز الحالات الآتية:

1. n عدد فردي عندئذٍ نفرض أن $t = cosx$
2. m عدد فردي عندئذٍ نفرض أن $t = sinx$
3. n, m زوجيان معاً عندئذٍ نفرض أن $t = tgx$
4. n, m فرديان معاً عندئذٍ تجوز الحالات السابقة كلها.

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{sin^3x}{cos^5x}.dx$

$$I = \int sin^3x.cos^{-5}x.dx$$

نلاحظ أن n, m فرديان معاً ، لذا نفرض أن: $t = tgx$ أي: $x = arctg\, t$ فيكون: $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

،فيكون: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ و $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$I = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 .\frac{dx}{cos^2x} = \int tg^3x.\frac{1}{cos^2x}.dx = \int t^3(1+t^2).\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int t^3.dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{4}tg^4x + c$$

❃ حساب التكاملات من النمط:

$\int \sin \alpha x.\cos \beta x\,.dx$ أو $\int cos\, \alpha x.\cos \beta x\,.dx$ أو $\int \sin \alpha x.\sin \beta x\,.dx$

لحساب هذه التكاملات نستخدم دساتير التحويل:

$$sin\alpha x\ .cos\beta x=\tfrac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x+sin(\alpha-\beta)x]$$
$$cos\alpha x\ .cos\beta x=\tfrac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)x+cos(\alpha-\beta)x]$$
$$sin\alpha x\ .sin\beta x=-\tfrac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)x-cos(\alpha-\beta)x]$$

مثال: أوجد التكامل $I=\int sin6x\,.cos2x\,.dx$

$$I=\tfrac{1}{2}\int[sin(6+2)x+sin(6-2)x].dx$$
$$I=\frac{1}{2}\int[sin(8x)+sin(4x)].dx=-\frac{1}{16}cos(8x)-\frac{1}{8}cos(4x)+c$$

حساب التكامل المحدد:

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، لنعرف الدالة $F(x)$ في المجال $[a,b]$ كما يلي: $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ حيث $a\le x\le b$، عندئذٍ تكون الدالة $F(x)$ قابلة للاشتقاق عند x و يعطى المشتق بالعلاقة $F'(x)=f(x)$ و عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$\int_a^x f(t).dt=F(x)-F(a),\forall x\in[a,b]$ و في حالة خاصة عندما $x=b$ نجد:

$$\int_a^b f(t).dt=F(b)-F(a)$$

خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^a f(x).dx=0$
2. $\int_a^b f(x).dx=-\int_b^a f(x).dx$
3. $\int_a^b k.f(x).dx=k.\int_a^b f(x).dx$ حيث k عدد ثابت.
4. $\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)].dx=\int_a^b f_1(x).dx+\int_a^b f_2(x).dx+\cdots+\int_a^b f_n(x).dx$
5. بفرض $c\in[a,b]$ عندئذٍ يكون: $\int_a^b f(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_c^b f(x).dx$
6. إذا كان $f(x)\ge0,\forall x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x).dx\ge0$
7. إذا كانت الدالتان $f(x),g(x)$ تحققان $f(x)\ge g(x),\forall x\in[a,b]$ فإن:
$$\int_a^b f(x).dx\ge\int_a^b g(x).dx$$
8. إذا كان $m\le f(x)\le M,\forall x\in[a.b]$ حيث m,M ثوابت عددية، عندئذٍ:
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x).dx\le M(b-a)$$

كما لأنه يوجد العدد μ حيث $m \leq \mu \leq M$ الذي يحقق $\int_a^b f(x).dx = \mu(b-a)$

ندعو $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$ القيمة الوسطى للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.

أمثلة:

احسب التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int_{-1}^{2} x.\sin(x^2).dx$$

نفرض أن $t = x^2$ فيكون $dt = 2x.dx$ و منه $dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

عندما $x = -1$ فإن $t = 1$ و عندما $x = 2$ فإن $t = 4$ نبدل في التكامل المعطى:

$$I_1 = \int_1^4 \sqrt{t}.\sin t.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^4 \sin t\,.dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_1^4 = \frac{1}{2}[-\cos 4 + cos 1]$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

نفرض $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و منه $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

عندما $x = 0$ فإن $t = 0$ و عندما $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = 1$ نبدل في التكامل المعطى:

$$\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^2.arctg\, x.dx$$

نكامل بطريقة التجزئة:

نفرض: $u = arctg\, x$ فيكون $du = \frac{dx}{1+x^2}$ و $dv = x^2.dx$ فيكون $v = \frac{1}{3}x^3$ و منه:

$$I_3 = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\, x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}x^3.\frac{dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\, x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right).dx$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\, x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}ln(2)$$