كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مكاملة الدوال الجذرية و الدوال المثلثية

لمكاملة الدوال الجذرية سنحاول تحويلها إلى مكاملة لدوال كسرية

حساب التكامل من الشكل $I = \int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{p}{s}}\right).dx$ حيث R دالة بالمتحول x و $m, n, \dots, p, s$ أعداد صحيحة.

لنفرض ان المقام المشترك للكسور $\frac{m}{n}, \dots \dots, \frac{p}{s}$ هو k

عندئذٍ لحساب هذه التكاملات نفرض أن $x = t^k$ فيكون $dx = kt^{k-1}dt$ ، نبدل في التكامل المعطى قيمة كل من x و dx فيتحول إلى تكامل كسري.

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

نكتب التكامل بالشكل: $I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$ بالتالي نفرض أن $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$ ،

نبدل في التكامل نجد: $I = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6(t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}$

$$I = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\,ln|t+1| + c$$

$$I = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\left(\sqrt[6]{x}\right) - 6\,ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$$

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

نكتب التكامل بالشكل: $I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^{\frac{1}{3}}}$ بالتالي نفرض أن $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$ ،

نبدل في التكامل نجد:

$$I = \int \frac{t^3 \times 6t^5dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^8dt}{1+t^2} = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right).dt$$

$$I = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + rctg\ t\right) + c$$

$$I = 6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{3} - \sqrt[6]{x} + rctg\ \left(\sqrt[6]{x}\right)\right) + c$$

حساب التكاملات من الشكل: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

لحساب هذه التكاملات نقوم برد ثلاثي الحدود الموجود تحت الجذر إلى مجموع مربعي مقدارين او فرق مربعي مقدارين لتنتج لدينا الحالات الآتية:

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}=argsh\left(\frac{t}{k}\right)+c=ln\left|t+\sqrt{t^2+k^2}\right|+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}}=argch\left(\frac{t}{k}\right)+c=ln\left|t+\sqrt{t^2-k^2}\right|+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=arcsin\left(\frac{t}{k}\right)+c$$

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{(t+k)^2}}=\int\frac{dt}{|t+k|}=\ln|t+k|+c$$

تمارين: أوجد كل من التكاملات الآتية:

$$\boldsymbol{I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2+4x+6=x^2+4x+4-4+6=(x+2)^2+2$$

نفرض أن $t=x+2$ فيكون $dx=dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_1=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=argsh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$I_1=argsh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$\boldsymbol{I_2=\int\frac{3dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=(x-2)^2-1$$

نفرض أن $t=x-2$ فيكون $dx=dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_2=\int\frac{3dt}{\sqrt{t^2-1}}=3\,argch\left(\frac{t}{1}\right)+c$$

$$I_2=3\,argch\,(x-2)+c$$

$$\boldsymbol{I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$-x^2+6x=-x^2+6x-9+9=9-(x-3)^2$$

نفرض أن $t = x - 3$ فيكون $dx = dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = arcsin\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$I_3 = arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{|x+1|} = \ln|x+1| + c$$

حساب التكاملات من الشكل: $\boldsymbol{I = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

لحل مثل هذه التكاملات نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)'$

$t = \frac{1}{2}(2ax + b) = ax + \frac{b}{2}$ فيكون $dt = a.dx$ و بالتالي $dx = \frac{dt}{a}$ و

$t = x - \frac{t - \frac{b}{2}}{a}$ ، نبدل في التكامل المعطى و نميز حالتين :

$a > 0 \Rightarrow I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+m}}$ و هو تكامل معروف

$< 0 \Rightarrow I = \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$ و هو أيضاً تكامل معروف

أمثلة: أوجد كل من التكاملات الآتية:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.dx}$$

نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)'$

$t = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$ فيكون $dt = .dx$ و بالتالي $dx = dt$ و $t = x + 2$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx = \int \frac{2(t+2)+1}{\sqrt{t^2-1}}.dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}.dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2-1}}.dt$$

$$I_1 = 2\sqrt{t^2 - 1} + argch\, t + c$$

$$I_1 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 3} + argch\,(x+2) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{x+5}{\sqrt{6 - 2x - x^2}}.dx}$$

نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(6 - 2x - x^2)'$ أي $t = -1 - x$ فيكون $dt = -dx$

$$\boldsymbol{6 - 2x - x^2} = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 6 = -(x+1)^2 + 7$$

نعوض في التكامل المعطى

$$I_2 = \int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt) = \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}.dt$$
$$= \int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}}.dt - 4\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}$$

$$I_2 = -\sqrt{7-t^2} - 4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + c$$
$$= -\sqrt{6-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{(-x-1)}{\sqrt{7}} + c$$

حساب التكاملات من الشكل $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ حيث: $b^2-4ac \neq 0$

لإيجاد هذه التكاملات نتمم ثلاثي الحدود ax^2+bx+c إلى مربع كامل فيتحول التكامل إلى أحد الأشكال الآتية:

1. $I_1 = \int R\left(t, \sqrt{k^2-t^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\sin u$ فيكون $dt = k.\cos u\,.du$

2. $I_2 = \int R\left(t, \sqrt{k^2+t^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\text{sh}\,u$ فيكون $dt = k.\text{ch}\,u\,.du$ أو نفرض $t = k\,tg\,u$

3. $I_3 = \int R\left(t, \sqrt{t^2-k^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\text{ch}\,u$ فيكون $dt = k.\text{sh}\,u\,.du$ أو نفرض $t = \frac{k}{\cos u}$

أوجد التكامل $\boldsymbol{I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}.dx}$

لحل هذا التكامل نفرض $x = 3\sin u$ فيكون $dx = 3\cos u\,.du$

$$I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}.dx = \int \frac{\sqrt{9-9(\sin u)^2}.(3\cos u)}{9\,(\sin u)^2}\,.du$$
$$= \int \frac{9(cos\,u)^2}{9(\sin u)^2}.du$$
$$= \int (cotg\,u)^2.du = \int ((cotg\,u)^2+1-1).du$$

$$I = -cotg\, u - u + c = -cotg\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) - \left(\arcsin\frac{x}{3}\right) + c$$

تكامل الدوال المثلثية من الشكل: $I = \int R(\sin x, \cos x)\,.\,dx$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $\frac{x}{2} = arctg\, t$ أي

$x = 2arctg\, t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ حيث $-\pi < x < \pi$

و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

يؤول التكامل إلى تكامل كسري

مثال: $I_1 = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $x = 2arctg\, t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ نبدل في التكامل المعطى

$$I_1 = \int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + c$$
$$= \ln\left|1 + tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin x.\,(2+\cos x - 2\sin x)}$$

نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $x = 2arctg\, t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ نبدل في التكامل المعطى

$$I_2 = \int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)}$$

و هو تكامل كسري لحله نقوم بتفريق الكسر $\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}$

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1}$$

بحساب الثوابت نجد:

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}=\frac{\frac{1}{3}}{t}+\frac{\frac{5}{3}}{t-3}+\frac{-1}{t-1}$$

$$\int\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}.dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}$$

$$\int\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}.dt=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+c$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\sin x.(2+\cos x-2\sin x)}$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{5}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-3\right|-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+c$$