كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الرابعة/نظري/

☞جدول التكاملات الاساسية

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

تكامل الدوال الكسرية

ندعو كل دالة من الشكل $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود،
فإذا كانت درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر أو تساوي درجة كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام لنحصل على صيغة جديدة للدالة $R(x)$ بالشكل:
$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ، حيث $H(x)$ يمثل حاصل القسمة و $P_1(x)$ باقي القسمة و هو كثيرة حدود درجته أصغر تماماً من درجة $Q(x)$ ، بالتالي:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}.dx=\int H(x).dx+\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}.dx$$

حيث $\int H(x).dx$ تكامل كثيرة حدود معروف سابقاً، و $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}.dx$ تكامل كسر بسيط

تكامل الكسور البسيطة:

نسمي الأنماط الآتية من الدوال الكسرية بالدوال الكسرية البسيطة:

$$\text{I}:\frac{A}{x-a}\qquad \text{II}:\frac{A}{(x-a)^k}\ ;\text{k}=2,3,4,..$$

$$\text{III}:\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\qquad IV:\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n};n=2,3,4,..$$

حيث $A,M,N,p,q,a\in\mathbb{R}$ و x^2+px+q كثيرة حدود لا يملك جذوراً حقيقة أي أن مميزه عدد سالب تماماً أي: $\Delta=p^2-4q<0$

أولاً: حساب التكامل من الشكل: $\int \frac{A}{x-a}.dx$

$$\int \frac{A}{x-a}.\text{dx}=\text{A}\int \frac{dx}{x-a}=\text{A}\ \ln|x-a|+\text{c}$$

مثال:

$$\int \frac{2}{3x+5}.\text{dx}=\frac{2}{3}\int \frac{3dx}{3x+5}=\frac{2}{3}\ \ln|3x+5|+\text{c}$$

ثانياً: حساب التكامل من الشكل $\int \frac{A}{(x-a)^k}.dx\ ;\text{k}=2,3,4,..$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}.dx=A\int (x-a)^{-k}.dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c$$

مثال:

$$\int \frac{9}{(3x+2)^7}.dx = 9\int (3x+2)^{-7}.dx = \frac{9}{3}\int 3(3x+2)^{-7}.dx$$
$$= 3\frac{(3x+2)^{-7+1}}{-7+1} + c = -\frac{1}{2}\frac{1}{(3x+2)^6} + c$$

ثالثاً: حساب التكاملات من الشكل: $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.dx$

حيث $p^2-4q<0$ و هذا يعني أن كثيرة الحدود x^2+px+q لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى، و لحل مثل هذه التكاملات نقوم بإتمام المقدار x^2+px+q إلى مربع كامل كما يلي:

$$x^2+px+q = x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

نفرض أن $t = x+\frac{p}{2}$ فيكون $x = t-\frac{p}{2}$ و بالتالي: $dx = dt$ و لنضع $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$

و منه إن $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}.dt = M\int \frac{t}{t^2+a^2}.dt + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.dx = \frac{M}{2}\ ln|t^2+a^2| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right).\frac{1}{a}.arctg\left(\frac{t}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.dx = \frac{M}{2}\ ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}.arctg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c$$

تمرين: أوجد التكامل $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2-2x+5 = x^2-2x+(1)^2-(1)^2+5 = (x-1)^2+4$$

نفرض أن $t = x-1$ فيكون $x = t+1$ و بالتالي: $dx = dt$ نعوض في التكامل:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx = \int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}.dt = \int \frac{2t}{t^2+4}.dt + 3\int \frac{dt}{t^2+4}$$
$$= ln|t^2+4| + \frac{3}{2}.arctg\left(\frac{t}{2}\right) + c$$
$$= ln|x^2-2x+5| + \frac{3}{2}.arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

رابعاً: حساب التكاملات من الشكل: $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.dx$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2+px+q = x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

نفرض أن $t = x+\frac{p}{2}$ فيكون $x = t-\frac{p}{2}$ و بالتالي: $dx = dt$ و لنضع $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$

نعوض في التكامل:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.dx = M\underbrace{\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}.dt}_{I}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}}_{J}$$

لحل التكامل $I = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}$ نفرض أن $u = t^2+a^2$ فيكون $du = 2tdt$

$$I = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}.dt = \int \frac{\frac{1}{2}.du}{u^n} = \frac{1}{2}\int u^{-n}.du$$

$$I = \frac{1}{2}.\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+c = -\frac{1}{2(n-1)}.\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+c$$

أما التكامل J فيحسب بطريقة التجزئة و يعطى بالدستور التدريجي الآتي:

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2n-3}{2n-2}.J_{n-1}-\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

تفريق الكسور:

لتكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ دالة كسرية حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي يمكن كتابة الدالة الكسرية $R(x)$ على شكل مجموع منته من الدوال الكسرية البسيطة و بالتالي فإن مكاملة أي دالة كسرية تؤول إلى حساب التكامل لكسور بسيطة.

نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى: $Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى و غير مكررة.

أي: $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$ و نكتب:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

حيث A_1، A_2، ...، A_n ثوابت عددية تعين بطريقتين إما بتوحيد المقامات ثم حذفها و المطابقة بين طرفي المساواة أو نتبع الطريقة الآتية: لتعيين A_k نضرب الطرفين بالمقدار $(x-a_k)$ و نجعل $x = a_k$.

تمرين: أوجد التكامل $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.dx$

نحلل المقام: $x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}$$

لتعيين A_1 نضرب الطرفين بالمقدار x

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)} = A_1 + \frac{x.A_2}{x-2} + \frac{x.A_3}{x+3}$$

و نجعل $x = 0$ نجد:

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

لتعيين A_2 نضرب الطرفين بالمقدار $(x-2)$ و نجعل $x = 2$ نجد: $A_2 = \frac{9}{10}$

لتعيين A_3 نضرب الطرفين بالمقدار $(x+3)$ و نجعل $x = -3$ نجد: $A_3 = -\frac{26}{15}$ و منه:

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{5}{6}}{x} + \frac{\frac{9}{10}}{x-2} + \frac{-\frac{26}{15}}{x+3}$$

و بالتالي:

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.dx = \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{9}{10}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.dx = \frac{5}{6}\ ln|x| + \frac{9}{10}\ ln|x-2| - \frac{26}{15}\ ln|x+3| + c$$

الحالة الثانية: $Q(x)$ تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى بعضها مكررة.

في هذه الحالة كل عامل مكرر k مرة مثل $(x-a)^k$ يوافقه مجموع k كسر بسيط كما يلي:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

حيث $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ ثوابت عددية لتعيينها نقوم بتوحيد المقامات ثم حذفها و المطابقة بين طرفي المساواة.

تمرين: أوجد التكامل الآتي: $I = \int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.dx$

نحلل المقام $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

بتوحيد المقامات ثم حذفها نجد:

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + B.x.(x-1)^2 + C.x.(x-1) + D.x$$

بالإصلاح:

$$x^3 + 1 = (A+B)x^3 + (-3A + C - 2B)x^2 + (3A + D - C + B)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -3A + C - 2B = 0 \\ 3A + D - C + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$ و منه:

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.dx = -ln|x| - 2\,ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c$$

الحالة الثالثة: عوامل المقام من الدرجة الثانية و غير مكررة.

عندئذٍ من أجل كل عامل من الدرجة الثانية مثل $x^2 + px + q$ يوافقه كسر بسيط من الشكل:

$$\frac{P(x)}{x^2+px+q} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

تمرين: أوجد التكامل $\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}.dx$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = x^2(x^2 + 4x + 4) - 9 = x^2(x+2)^2 - (3)^2$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 &= (x^2 + 2x)^2 - (3)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

بتوحيد المقامات و حذفها و الإصلاح نحصل على:

$$7x^2+26x-9=(A+B+C)x^3+(5A+B+2C+D)x^2+$$
$$+(9A+B-3C+2D)x+9A-3D-3B$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B+2C+D=7 \\ 9A+B-3C+2D=26 \\ 9A-3D-3B=-9 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد أن: $A=1, B=1, C=-2, D=5$

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}.dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.dx$$

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}.dx$$
$$=ln|x-1|+ln|x+3|-ln|x^2+2x+3|+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}.dx=ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

الحالة الرابعة: عوامل المقام من الدرجة الثانية و بعضها مكرر.

عندئذٍ من أجل كل عامل من الدرجة الثانية مثل x^2+px+q مكرر k مرة يوافقه مجموع k كسر بسيط كما يلي:

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

لتعيين الثوابت العددية نوحد المقامات و نحذفها ثم نقوم بعملية المطابقة.

①

جدول التكاملات الأساسية

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \qquad ; \quad x \neq 0$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad 0 < a \neq 1 \; ; \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + c \quad ; \quad x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad ; k \in Z$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + c \quad ; \quad x \neq \pi k \quad ; k \in Z$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\,\sin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; |x| < |a| \quad ; \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c = arg\,ch\left(\frac{x}{a}\right) + c \; ; \; |x| > |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad ; a \neq 0$$

$$\int \operatorname{sh} x \cdot dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + c \quad : x \neq 0$$

جدول التكاملات الأساسية