



كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

المادة : رياضيات عامة ٢

المحاضرة : الثالثة / نظري

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



التكامل غير المحدد

تعريف: نسمي الدالة $F(x)$ حيث $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I ، إذا

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

تحقق ما يلي: $F(x) = \arcsin x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ لأن:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[$$

مبرهنة: كل دالة مستمرة على مجال مغلق تملك دالة أصلية على هذا المجال.

ملاحظة: إذا كانت الدالة التي نبحث عن دالتها الأصلية تعاني من انقطاع فإننا ندرس الدالة

على المجالات التي تكون مستمرة عليها.

تعريف: لتكن $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a, b]$ ، عندئذٍ إن أحد الدوال الأصلية

لها على هذا المجال يسمى تكاملاً غير محدد لها و نكتب $\int f(x).dx = F(x) + c$ حيث c ثابت اختياري.

الطرق الأساسية في التكامل:

1. الطريقة المباشرة: بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد يمكن حساب التكامل مباشرة

برده إلى تكاملات موجودة في جدول التكاملات الأساسية الشهيرة.

أمثلة:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}.dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = \int x^{\frac{1}{2}}.dx + \int x^{-\frac{1}{2}}.dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{x^2+1}.dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}.dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}.dx + \int \frac{-1}{x^2+1}.dx \\ &= \int 1.dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int tg^2(x).dx = \int (tg^2(x) + 1 - 1).dx \\ &= \int (tg^2(x) + 1).dx - \int dx = tg(x) - x + c \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{dx}{x \cdot \ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}.dx = \ln|\ln(x)| + c$$

2. طريقة تغيير المتحول:

تعتمد على إدخال متغير جديد t عوضاً عن x يرتبط معه بالعلاقة: $x = \varphi(t)$ ، حيث $\varphi(t)$ دالة مستمرة و المشتق الأول لها مستمر أيضاً و عندئذ يكون لدينا:

$$\int f(x).dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$$

ببدالة x .

أمثلة:

$$I_1 = \int e^{x^3} x^2 . dx$$

نفرض $t = x^3$ فيكون $dt = 3x^2 . dx$ و منه $x^2 . dx = \frac{1}{3} dt$ ، نعوض في التكامل:

$$I_1 = \int e^t . \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t . dt = \frac{1}{3} e^t + c = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{3-2x}$$

نفرض أن $t = 3 - 2x$ و منه $dt = -2dx$ أي $dx = -\frac{1}{2} dt$

$$I_2 = \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + c = -\frac{1}{2} \ln|3-2x| + c$$

$$I_3 = \int \sqrt{3x+1} . dx$$

نفرض $t^2 = 3x+1$ فيكون $2t . dt = 3dx$ و بالتالي $dx = \frac{2}{3} t . dt$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int t . \left(\frac{2}{3} t . dt \right) = \frac{2}{3} \int t^2 . dt = \frac{2}{3} . \frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{9} t^3 + c \\ &= \frac{2}{9} \left[(3x+1)^{\frac{3}{2}} \right] + c = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+1)^3} + c \end{aligned}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

نفرض أن $t = 2x$ فيكون $dt = 2dx$ أي $dx = \frac{1}{2} dt$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - (2x)^2}} \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{t}{3}\right) + c \\ &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x}{3}\right) + c \end{aligned}$$

3. حساب التكامل بطريقة التجزئة:

لتكن لدينا الدالتان $u(x), v(x)$ القابلتان للاشتقاق حيث المشتق الأول لكل منهما دالة مستمرة على مجال ما، يعطى دستور التكامل بالتجزئة بالعلاقة الآتية:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

أمثلة:

$$I = \int x \cdot \ln(x) dx$$

نفرض أن $u(x) = \ln(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x}$ و $dv = x \cdot dx$ فيكون $v = \frac{1}{2}x^2$ بالتالي:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \int x \cdot dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c \end{aligned}$$

$$I = \int x \cdot \cos x \cdot dx$$

نفرض أن $u(x) = x$ فيكون $du = dx$ و $dv = \cos x \cdot dx$ فيكون $v = \sin x$ ومنه:

$$I = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

إن دستور التكامل بالتجزئة يسهل علينا حساب التكامل إذا أحسنا اختيار كل من dv, u فمثلاً في التكامل السابق في حال فرضنا $u(x) = \cos x$ و $dv = x \cdot dx$ لحصلنا على تكامل أصعب من التكامل I ، لذلك سنصنف الجزء الأكبر من التكاملات في ثلاث مجموعات لكل منها فرضيتها الخاصة، مع التأكيد على أن المجموعات الثلاث لا تشمل كل التكاملات التي يمكن حسابها بطريقة التجزئة.

المجموعة الأولى: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot dx, \int P_n(x) \cdot \sin \alpha x \cdot dx, \int P_n(x) \cdot \cos \alpha x \cdot dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض $u(x) = P_n(x)$ و نفرض ما تبقى داخل إشارة التكامل dv ثم نعوض بدستور التكامل بالتجزئة.

أمثلة:

$$I = \int (x^2 - 6x + 2) e^{3x} . dx$$

نفرض $u(x) = x^2 - 6x + 2$ فيكون $du = (2x - 6) . dx$ و $dv = e^{3x} . dx$ فيكون $v = \frac{1}{3} e^{3x}$ نعوض بالدستور:

$$I = \frac{1}{3} e^{3x} . (x^2 - 6x + 2) - \int \frac{1}{3} e^{3x} . (2x - 6) . dx$$

$$I = \frac{1}{3} e^{3x} . (x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{3} \underbrace{\int e^{3x} . (x - 3) . dx}_J$$

نكامل J بالتجزئة أيضاً فنفرض $u = x - 3$ فتكون $du = dx$ و $dv = e^{3x} . dx$ فيكون $v = \frac{1}{3} e^{3x}$ و منه:

$$J = \frac{1}{3} e^{3x} . (x - 3) - \frac{1}{3} \int e^{3x} . dx = \frac{1}{3} e^{3x} . (x - 3) - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

نعوض في عبارة I نجد:

$$I = \frac{1}{3} e^{3x} . (x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} e^{3x} . (x - 3) - \frac{1}{9} e^{3x} + c \right)$$

و بالتالي:

$$I = \frac{1}{3} e^{3x} . (x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{9} e^{3x} . (x - 3) + \frac{2}{27} e^{3x} + c'$$

$$I = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{90} x + \frac{38}{27} \right) e^{3x} + c'$$

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x) . \arcsin(x) . dx \quad \int P_n(x) . \arccos(x) . dx , \quad \int P_n(x) . \arctg(x) . dx$$

$$\int P_n(x) . \operatorname{arccotg}(x) . dx , \quad \int P_n(x) . \ln(x) . dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $dv = P_n(x) . dx$ و ما تبقى ضمن إشارة التكامل نفرضه

 $u(x)$

أمثلة:

$$I_1 = \int \arcsin(x).dx$$

نفرض $u(x) = \arcsin(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ و أن $dv = dx$ فيكون $v = x$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I_1 = x.\arcsin(x) - \int \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = x.\arcsin(x) + \int \frac{-2x.dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_1 = x.\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$I_2 = \int \ln(x).dx$$

نفرض نفرض أن $u(x) = \ln(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x}$ و $dv = dx$ فيكون $v = x$ بالتالي:

$$I = x.\ln(x) - \int x.\frac{dx}{x} = x.\ln(x) - \int dx = x.\ln(x) - x + c$$

$$I_3 = \int x.\arctg(x).dx$$

نفرض أن $u(x) = \arctg(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x^2+1}$ و $dv = x.dx$ فيكون $v = \frac{1}{2}x^2$ بالتالي:

$$I_3 = v = \frac{1}{2}x^2.\arctg(x) - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}x^2.\arctg(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}.dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}x^2.\arctg(x) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right).dx \\ &= \frac{1}{2}x^2.\arctg(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctg(x) + c \end{aligned}$$

المجموعة الثالثة: التكاملات من الشكل

$$\int e^{ax} \cos bx . dx , \int e^{ax} \sin bx . dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $u(x)$ هو إما الدالة الأسية أو المثلثية و ما يبقى داخل إشارة

التكامل نفرضه dv

$$I = \int e^{2x} . \sin(3x) . dx \text{ مثال:}$$

الحل:

نفرض أن $u(x) = e^{2x}$ فيكون $du = 2e^{2x}$ و نفرض $dv = \sin(3x)$ فيكون

$$v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \underbrace{\frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \cdot dx}_J$$

نكامل J بالتجزئة: نفرض أن $u(x) = e^{2x}$ فيكون $du = 2e^{2x}$ و نفرض

$$dv = \cos(3x) \text{ فيكون } v = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$J = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3} \int e^{2x}\sin(3x) \cdot dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}I$$

نعوض في عبارة I :

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}I \right)$$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) - \frac{4}{9}I$$

$$I + \frac{4}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x)$$

$$\frac{13}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x)$$

$$I = \frac{9}{13} \left(-\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\sin(3x) \right) + c$$

$$I = -\frac{3}{13}e^{2x} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x) + c$$

التكامل الآتي $\int \frac{x}{\sin^2(x)} \cdot dx$ ليس من المجموعات السابقة و يحسب بطريقة التجزئة كما يلي:نفرض $u = x$ فيكون $du = dx$ و $dv = \frac{dx}{\sin^2(x)}$ فيكون $v = -\cot gx$

$$I = -x \cdot \cot gx + \int \cot gx \cdot dx = -x \cdot \cot gx - \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

$$I = -x \cdot \cot gx - \ln|\sin x| + c$$



مكتبة
A to Z