كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الثانية/نظري/

اشتقاق و تفاضل الدوال

تعريف: ليكن I مجالاً غير خالٍ و غير مؤلف من نقطة واحدة في $\mathbb{R}$ و ليكن $a \in I$ ، لنأخذ الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا قبلت دالة نسبة التغير: $h: I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل: $h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية منتهية عند a.
نرمز لهذه النهاية إن وجدت بالرمز $f'(a)$ أو $\frac{df}{dx}(a)$ و ندعوه العدد المشتق عند a و هو يمثل ميل المماس لمنحني الدالة f في النقطة $(a, f(a))$، و عندما يكون
$\lim_{x\to a} h(x) = \pm\infty$ فعندئذٍ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a لكن يكون لخطها البياني مماس شاقولي في النقطة $(a, f(a))$.

مبرهنة: إذا كانت الدالة $f: I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند $a \in I$ فإن الدالة f مستمرة عند a.

ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة فمثلاً الدالة: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة وفق: $f(x) = |x|$ هي دالة مستمرة عند الصفر و لكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

فيما يلي نورد مشتقات الدوال الابتدائية:

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b \,:\, a\,, b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{a}$
$f(x) = x^n \,, n \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{n}x^{n-1}$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = log_a(x), 0 < a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{ln(a)} . \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x ,, 0 < a \neq 1$	$f'(x) = a^x . ln(a)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -(1 + (\cot x)^2) = \frac{1}{(\sin x)^2} = (co\sec x)^2$

مبرهنة:

إذا كانت $u: I \to \mathbb{R}$ و كانت $f: J \to \mathbb{R}$ و بفرض أن $u(x) \in J, \forall x \in I$ ، عندئذٍ يمكن تركيب الدوال بالشكل: $f \circ u: I \to \mathbb{R}$ حيث $(f \circ u)(x) = f\big(u(x)\big)$ و إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ و f قابلة للاشتقاق على J عندئذٍ إن $f \circ u$ دالة تقبل الاشتقاق على I و تحقق العلاقة: $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x)$

مثال: لتكن الدالة: $g(x) = ln\big(u(x)\big)$ أوجد $g'(x)$

نعتبر $f(x) = ln(x)$ عندئذٍ $g'(x) = (f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{u(x)}\ .u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

<u>المبرهنة الآتية تفيد في قواعد حساب المشتقات:</u>

لتكن f, g دالتان معرفتان على I و لتكن $x \in I$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، و كل من f, g قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ ، عندئذٍ تتحقق كل من العلاقات الآتية:

1. الدالة $(f + g)$ تقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ و يكون:
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
2. الدالة (λf) تقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ و يكون:
$$(\lambda f)'(x) = \lambda. f'(x)$$
3. الدالة $f. g$ تقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ و يكون:
$$(f. g)'(x) = f'(x). g(x) + f(x). g'(x)$$

إذا كانت الدالة $g(x)$ لا تنعدم على I فإن الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ تقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ و يكون: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$

مشتق الدالة العكسية:

إذا كانت $f: A \to B$ دالة تقابل و لها تقابل عكسي هي الدالة: $g: B \to A$

$x \mapsto y = f(x)$ $\qquad$ $x = g(y)$

عندئذٍ لدينا: $x = g(y) = g\big(f(x)\big)$ نشتق الطرفين بالنسبة للمتحول x نجد:

$g'\big(f(x)\big). f'(x) = 1$ و منه $g'(y) = \frac{1}{f'(x)};\ f'(x) \neq 0, \forall x \in A$

أمثلة:

1. لنأخذ الدالة: $y = f(x) = arcsin(x)$ المعرفة على المجال $]-1,1[$ و هي التقابل العكسي للدالة:

$$\varphi: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$$
$$x = \varphi(y) = \sin y$$

فتكون $\varphi'(y) = \cos y > 0$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، بملاحظة أن:

$$(\cos y)^2 = 1 - (\sin y)^2 \Longrightarrow \cos y = \sqrt{1-(\sin y)^2} = \sqrt{1-x^2}$$

نجد أن $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. لنأخذ الدالة: $y = f(x) = arctg(x)$ دالة عكسية للدالة $x = \varphi(y) = tg(y)$

حيث $\varphi'(y) = 1 + tg^2(y) = 1 + x^2 \neq 0$ عندئذٍ: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{1+x^2}$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

بطرقة مشابهة نجد أن:

$$(\mathrm{arctog}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{و} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

الدوال القطعية و مشتقاتها و دوالها العكسية:

1. دالة الجيب القطعي $y = shx$

هي دالة تقابل و هي دالة فردية معرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $y = shx = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ و دالة تقابلها العكسية تعطى بالعلاقة: $x = ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ و بالرموز المألوفة نكتب:

$$argsh(x) = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

2. دالة التجيب القطعية $y = chx$

هي دالة تقابل و هي دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $y = chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و دالة تقابلها العكسية تعطى بالعلاقة: $x = ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$ و بالرموز المألوفة نكتب:

$$argch(x) = ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

يعطى مشتق كل منهما بالعلاقة $(sh\, x)' = chx$ و $(ch\, x)' = shx$

و تعطى مشتقات الدوال العكسية لها

$$(argch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$(argsh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

العلاقات القطعية:

$$sh\,x + ch\,x = e^x \quad , ch\,x - sh\,x = e^{-x}\,, (ch\,x)^2 - (sh\,x)^2 = 1$$

$$sh\,2x = 2\,sh\,x\,ch\,x \quad , ch\,2x = 2ch^2x - 1 = ch^2x + sh^2x$$

$$ch^2x = \frac{ch(2x)+1}{2} \quad , sh^2x = \frac{ch(2x)-1}{2}$$

3. دالة الظل القطعي:

هي دالة تقابل و هي دالة فردية معرفة على $\mathbb{R}$ وفق: $y = thx = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{sh\,x}{ch\,x}$ و تأخذ قيمها في $]-1,1[$ و لها دالة تقابل عكسية تعطى بالعلاقة: $x = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ و بالرموز المألوفة نكتب: $\arg th\,x = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

و يكون: $(th\,x)' = 1 - th^2x$ و $(argth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$

التفاضل:

عرفنا مشتق الدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ بالعلاقة:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ و بحذف النهاية فإن المساواة السابقة غير محققة أي: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq f'(x_0)$ و بالتالي: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \neq 0$

نضع $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = \alpha(x)$ أي: $\alpha(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$

و منه نجد $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha(x) + f'(x_0)$ و يكون

$$\Delta y = \Delta x\big(\alpha(x) + f'(x_0)\big) = \alpha(x).\Delta x + f'(x_0).\Delta x$$

نسمي المقدار $f'(x_0).\Delta x$ بتفاضل الدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ و نرمز له dy

حيث $\alpha(x)$ دالة تسعى للصفر عندما Δx يسعى للصفر و نكتب عندئذٍ $\Delta x = dx$

فإذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند نقطة ما x فهي قابلة للمفاضلة عندها و يعطى تفاضل الدالة $y = f(x)$ فيها بالعلاقة $dy = y'dx$

مثال: أوجد تفاضل الدالة $y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a.ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

نعلم أن تفاضل الدالة يعطى بالعلاقة $dy = y'dx$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}.x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}} + \frac{1}{2}.a.\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}} + \frac{1}{2}.a.\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}.\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}} + \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \sqrt{x^2+a}$$

بالتالي نجد: $dy = \sqrt{x^2+a}\,.dx$

مثال: احسب تزايد سطح دائرة نصف قطرها 80.6 إذا ازداد نصف قطرها بمقدار 0.1

الحل: نفرض y سطح الدائرة و x هو نصف قطرها فتكون الدالة $y = \pi x^2$

و منه $dy = 2\pi x\,.dx = 2\pi(80.6)(0.1) = 16.12\pi$