كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

7

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الفصل الأول: المصفوفات

تعاريف

(1) الجدول المؤلف من مجموعة عناصر مرتبة بشكل أسطر عددها m وأعمدة عددها n:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يسمى مصفوفة $m \times n$

أو مصفوفة مرتبتها $m \times n$ أو مصفوفة من الشكل (m,n)

- بشكل عام يسند للمصفوفة حرف لاتيني كبير $A, B, C, \dots$

ولعناصر المصفوفة: a_{ij} ; $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$

حيث الدليل الأول i يشير إلى رقم السطر بينما يشير الدليل الثاني j إلى رقم العمود الذي يقع فيه العنصر.

- عندئذٍ يمكننا أن نكتب: $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ وهو الشكل المختصر لكتابة المصفوفة.

في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فربما تكون توابع أو كثيرات حدود أو ... والكلام في هذا الفصل سنهتم بالمصفوفات ذوات العناصر العددية فقط.

مثال 1: المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ مؤلفة من سطرين وثلاثة أعمدة فهي من الشكل $(2,3)$

ونلاحظ أن: $a_{11}=1 \quad a_{21}=0 \quad a_{23}=5$

$a_{22}=2 \quad a_{12}=8 \quad a_{13}=-4$

(2) نقول عن مصفوفتين A, B إنهما من نفس الطبيعة (m,n) إذا احتوت كل منهما على عدد m من الأسطر وعدد n من الأعمدة.

(3) نقول عن مصفوفتين $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ إنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا كانتا من نفس الطبيعة وكان $a_{ij}=b_{ij}, \forall i,j$

أي أن العناصر المتقابلة في المصفوفتين متساوية.

مثال 2: إذا كان: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

فإن: $a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=3, a_{21}=2, a_{22}=-4, a_{23}=-1$

(4) منقول المصفوفة: لتكن $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ مصفوفة حقيقية نرمز لمنقولها بالرمز A^T أو T_A ونعرّف بالشكل:

$A^T=[a_{ji}]_{(n,m)}$

أي أنه للحصول على منقول مصفوفة يكفي أن نجعل الأسطر أعمدة أو الأعمدة أسطر. ومن التعريف نستنتج: $(A^T)^T=A$

مثال 3: إن منقول المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ هو

$A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

أنواع المصفوفات

أولاً: نقول عن المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ إنها:

1) مصفوفة حقيقية: إذا كانت جميع عناصرها أعداداً حقيقية، وإذا كان أحد هذه العناصر على الأقل عدداً عقدياً (مركباً) فنسمي عندئذٍ المصفوفة مصفوفة عقدية (مركبة)

$$A=\begin{bmatrix} 5 & \pi & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{4} & -2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1-3i & -i \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A: مصفوفة حقيقية — B: مصفوفة عقدية

2) مصفوفة مربعة: إذا كان $m=n$ ونكتب $A=[a_{ij}]_n$

مصفوفة مستطيلة: عندما $m\neq n$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A: مصفوفة مربعة — B: مصفوفة مستطيلة

عناصر القطر الرئيسي: 2, -1, 1

عناصر القطر الثانوي: 4, -1, 3

القطر الرئيسي والقطر الثانوي في المصفوفة المربعة

3) مصفوفة السطر: إذا كانت المصفوفة مؤلفة من سطر واحد وعدة أعمدة

مثلاً: $A=[2 \quad 3 \quad 1]$

4) مصفوفة العمود: إذا كانت المصفوفة مؤلفة من عمود واحد وعدة أسطر

$$A=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5) مصفوفة صفرية: إذا كانت جميع عناصرها أصفاراً ونرمز

لها بـ $O_{(m,n)}$ فمثلاً $O_{(2,2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ثانياً: نقول عن المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]_n$ إنها:

1) مصفوفة متناظرة: إذا كان $a_{ij}=a_{ji}$ وذلك من أجل جميع $i,j=1,2,\dots,n$ حيث i و j مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(ويكون $A^T=A$)

2) مصفوفة متناظرة عكسياً: إذا كان $a_{ij}=-a_{ji}$ وذلك من أجل جميع $i,j=1,2,\dots,n$ حيث i و j مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- نلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي لها معدومة حيث $a_{ij}=-a_{ij}$ أي $2a_{ii}=0$ أي $a_{ii}=0$ (طبعاً كل عنصر بالقطر الرئيسي رمزه a_{ij} أو a_{ii})

(وهنا $A^T=-A$)

3) مصفوفة مثلثية عليا: إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

أو سفلى

4) مصفوفة مثلثية دنيا: إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) مصفوفة قطرية: إذا كانت مصفوفة مربعية عناصرها على القطر الرئيسي مختلفة عن الصفر وباقي العناصر أصفار أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي معدومة

مثال: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(6) مصفوفة سلمية: هي مصفوفة قطرية تكون عناصر القطر الرئيسي فيها متساوية

$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

(7) مصفوفة واحدية: إذا كانت سلمية وجميع عناصر القطر الرئيسي تساوي الواحد

نرمز لها بالرمز I_n

$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات:

1- جمع المصفوفات:

إذا مجموع المصفوفتين $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ (يشترط لهما نفس المرتبة)

هو مصفوفة C لها نفس مرتبة A ومرتبة B وعناصرها معرفة بالشكل

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ونرمز لها بـ $A+B$ ونكتب:

$$C=A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]\quad ;\forall i,j$$

2- طرح المصفوفات: يتم على مثاله:

$$A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]$$

مثال: أوجد $A+B$, $A-B$ إذا علمت أن:

$A=\begin{bmatrix}1&5\\4&-2\\0&2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}1&-2\\2&0\\5&2\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 5-2\\ 4+2 & -2+0\\ 0+5 & 2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & -2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$ المثال

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 5-2\\ 4-2 & -2-0\\ 0-5 & 2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 2 & -2\\ -5 & 0\end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت A, B, C مصفوفات لها الخصائص، فإن عملية جمع المصفوفات تتمتع بالخواص الآتية:

1) الخاصية التبديلية: $A+B=B+A$

2) الخاصية التجميعية: $A+(B+C)=(A+B)+C$

3) يوجد عنصر حيادي: $A+O=A$ ← المصفوفة الصفرية

4) $(A+B)^T=A^T+B^T$

3 ـ ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

نسمي المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة $A=[a_{ij}]$ بالعدد الحقيقي λ جداء المصفوفة A بالعدد λ ونرمز لذلك بـ λA.

$$\lambda A=\lambda\,[a_{ij}]=[\lambda a_{ij}]$$

مثال: جداء المصفوفة $A=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ بالعدد $\lambda=2$ هو

$$2A=\begin{bmatrix}14 & 0\\ 4 & -2\\ 6 & 10\end{bmatrix}$$

ـ حالة خاصة: إذا أخذنا $\lambda=-1$ فإننا نجد:

$$\lambda A=(-1)A=[-a_{ij}]$$

نرمز لهذه المصفوفة الجديدة بـ $-A$ وسميناها نظيرة المصفوفة A بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ونكتب: $A+(-A)=O$ ← مصفوفة صفرية

- خواص جداء مصفوفة بعدد: إذا كانت A, B مصفوفتان من الرتبة نفسها و α و β عددين حقيقيين فإن:

C1 $\alpha . A = 0$

C2 $1 . A = A$

C3 $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

C4 $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

C5 $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

C6 $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4. جداء المصفوفات: نفرض لدينا المصفوفتان

$A = [a_{ij}]_{(m,p)}$

$B = [b_{ij}]_{(p,n)}$

فإذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B

عندئذ يعرف جداء المصفوفتين A, B بالمصفوفة C ذات الرتبة (m,n) ونكتب

$C = A.B$

وحدّ عناصر C:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} . b_{kj}$$

$i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$

أي أنه من أجل أي زوج (i,j) فإن العنصر c_{ij} من المصفوفة الجداء $C = A.B$ هو مجموع جداءات العناصر الناتجة من ضرب عناصر السطر (i) من A بالعناصر المقابلة لها من عناصر العمود (j) من B

مثال: أوجد جداء المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$(3,2)$ $(2,2)$

$(3,2)$ المصفوفة الناتجة

الحالة: إذا كان جداء $A.B$ معرف فذلك لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B.

$$A.B=\begin{bmatrix}(1)(-6)+(-2)(2) & (1)(7)+(-2)(0)\\ (3)(-6)+(0)(2) & (3)(7)+(0)(0)\\ (5)(-6)+(4)(2) & (5)(7)+(4)(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 7\\ -18 & 21\\ -22 & 35\end{bmatrix}$$

" هنا الجداء $B.A$ غير معرف لأن عدد أعمدة B لا يساوي عدد أسطر A "

خواص جداء مصفوفتين وأكثر: إذا كانت A,B,C مصفوفات معلومة و α عدد حقيقي ولتكن فرضاً أن الجداءات الآتية معرفة، فإن هذه المصفوفات تتمتع بالخواص الآتية:

1) جداء المصفوفات غير تبديلي في الحالة العامة: $A.B\neq B.A$

- أحياناً في حالات خاصة جداً يكون $A.B=B.A$ وعندها نقول إن المصفوفتين متبادلتان.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$A.B=B.A=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix}$$

2) جداء المصفوفات تجميعي: $A.(B.C)=(A.B).C$

3) $A.(B+C)=(A.B)+(A.C)$

4) $(A.B)^T=B^T.A^T$

أي أن منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقولي هاتين المصفوفتين ولكن بترتيب معاكس.

5) $\alpha.(A.B)=(\alpha.A).B$

ملاحظة: إن جداء مصفوفتين مربعتين قد يكون أي منهما مصفوفة صفرية فمثلاً:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

المحددات (الماتريسات)

1- المحدد من المرتبة الثانية المقابل للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

هو العدد $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

حاصل عناصر القطر الثانوي - حاصل عناصر القطر الرئيسي

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (3)(2) - (-1)(2) = 6 - (-2) = 8$$

2- المحدد من المرتبة الثالثة المقابل للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & + & - \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ + & - & + \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

يُحدد: $(-1)^{i+j}$ $\quad i+j \quad 2+3$

$= (-1)^{5} = -$

- طريقة لابلاس:

- نأخذ أصغر المصفوفة ونشر بدلالة ثلاثة محددات من المرتبة الثانية:

$(-1)^{i+j}$

$= (-1)^{1+1} = +$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

حيث هنا نشرنا المحدد وفقاً لعناصر السطر الأول

ونلاحظ أن كل حد في هذا النشر هو عبارة عن حاصل ضرب كل عنصر من عناصر السطر الأول بالمحدد الناتج عن حذف السطر والعمود الحاملين لهذا العنصر مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ حيث i رقم السطر و j رقم العمود الذي يقع فيه العنصر.

هذا ويمكن نشر المحدد وفق أي سطر مهما أو أي عمود.

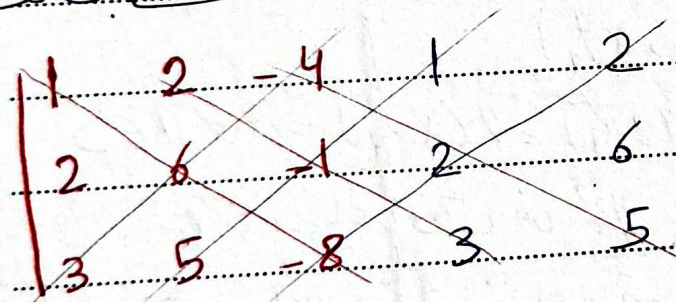
مثال: احسب $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[(6)(-8) - (-1)(5)\right] - 2\left[(2)(-8) - (-1)(3)\right] - 4\left[(2)(5) - (3)(6)\right]$$

$$= (1)(-43) - (2)(-13) + (-4)(-8) = 15$$

•• طريقة ساروس: تعتمد هذه الطريقة (التي تطبق فقط في حالة مُحدد من المرتبة الثالثة) على اضافة عمودين آخرين على المحدد السابق لها على الترتيب العمود الأول والعمود الثاني ثم نأخذ جداء عناصر القطر الرئيسي والخطين الموازيين له ونعطيها اشارة (+) كما نأخذ جداء عناصر القطر الثاني والخطين الموازيين له ونعطيها اشارة (-) كما في المثال السابق لنطبق:



$$= (1)(6)(-8) + (2)(-1)(3) + (-4)(2)(5)$$

$$- (2)(2)(-8) - (1)(-1)(5) - (-4)(6)(3) = 15$$

3- المحدد من المرتبة n: نتابع هنا كل تعريف مفهومين جديدين هما مفهوما الصغير والمتمم الجبري لعنصر من عناصر مصفوفة

المحدد: نفرض لدينا مصفوفة مربعة A من المرتبة n، إذا هو عبارة عن المجموع الجبري لعناصر السطر ذي الرقم (i) والعمود ذي الرقم (j) من كل مصفوفة مربعة من المرتبة $(n-1)$ بالشرط بحيث عدد المصفوفة المربعة الناتجة أصغر من عدد المصفوفة الأصلية.

a_{ij} أحد العناصر المتعلقة بالعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز Δ_{ij}

ملاحظة: محددات مصفوفة هي أعداد، وعدد محددات مصفوفة يساوي عدد عناصر هذه المصفوفة.

المتمم الجبري: نسمي محدد العنصر a_{ij} مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز A_{ij} ونكتب:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

مثال: إذا كان لدينا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن محدد العنصر $a_{11} = 2$ هو:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

ومتممه الجبري هو:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = \Delta_{11} = -1$$

أما محدد العنصر 5 فهو:

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ومتممه الجبري:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \Delta_{22} = 1$$

محدد العنصر $a_{32} = 2$ هو

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

ومتممه الجبري

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \Delta_{22} = (-1).6 = -6$$

الآن وبعد أن تعرفنا على العنصر والمتمم الجبري لعنصر فإننا نلاحظ مما سبق تعريف المحدد من المرتبة الثالثة (بطريقة ساروس) أن قيمة المحدد من المرتبة الثالثة تكتب بالشكل الآتي (بالنشر وفق السطر الأول):

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

وعليه فإن قيمة المحدد تساوي مجموع جداءات عناصر السطر (i) في المتممات الجبرية لعناصر هذا السطر.

وبشكل عام لنشر أي محدد من أية مرتبة كانت نكتب (النشر وفق السطر الأول)

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

ملاحظة:

- يجب أن نميز بين المصفوفة ومحدد المصفوفة، فالمصفوفة كما عرفناها سابقاً عبارة عن جدول بينما المحدد عبارة عن عدد.

كما أنه عند ضرب المصفوفة بعدد نضرب كل عناصر المصفوفة بهذا العدد بينما في المحدد نضرب أحد الأسطر فقط أو أحد الأعمدة

مكتبة A to Z