كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : فيزياء عامة ١

المحاضرة : الثانية/نظري/دكتورة

{{ مكتبة A to Z }}

2024 2025

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية ، تكنلوجيا المعلومات والاتصالات

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المحاضرة (2)

حركيات النقطة المادية:

• علم الحركة أو حركيات النقطة المادية، هو ذلك الجزء من الميكانيك الذي يهتم بدراسة وتوصيف الحركة وتغيراتها بدلالة الزمن بصرف النظر عن مسبباتها كالقوى مثلاً والتي تسمى تحريك النقطة المادية.

• إن معرفة تغير موقع نقطة مادية ما بدلالة الزمن تقدم لنا وصفاً كاملاً لحركة تلك النقطة.

• نهتم هنا بالمقادير التي توصف حركة الجسم وهي: موضع الجسم وسرعته وتسارعه، والتي تمثل بإحداثيات مختلفة.

1- تعاريف:

• النقطة المادية: هي أصغر جسم مادي ليس له أبعاد، حيث أن لكل نقاط الجسم المتماسك المتحرك نفس الحركة، وهذا يدعونا إلى القيام بدراسة حركة أحد نقاطه المميزة له مثل مركز كتلته. فتكون هذه النقطة ممثلة الجسم من حيث حركته وكتلته، ويطلق على هذه النقطة أيضاً اسم المتحرك.

• الحركة والسكون مفهومان نسبيان فقد يكون الجسم ساكناً بالنسبة لجملة مقارنة ومتحركاً بالنسبة لمرجع آخر، ولهذا عند دراسة أي حركة يجب تعيين نظام مرجعي (معلم) الذي تسند إليه الحركة، وتتم هذه الدراسة وفق أحد الشكلين:

- شعاعي: باستخدام أشعة الموضع والسرعة والتسارع.
- حيزي: باستخدام معادلة الحركة وفق مسار معين.

• المتحرك: يقال عن جسم أنه متحرك إذا كان في مكانين مختلفين في زمنين مختلفين، أو بعبارة أخرى تغيرت مواضعه بمرور الزمن.

• التوابع النقطية:

توجد في الحيز ثلاث مقادير تتعلق بموضع النقطة المتحركة M أي بـ: (x, y, z) وبوسيط آخر هو الزمن غالباً (t)، فمثلاً يطلب معرفة قيمة سرعة حركة النقطة M في مكان معين وفي لحظة معينة، والسرعة هي تابع شعاعي لموضع النقطة، أما إذا كان

المقدار المطلوب تحديده مقداراً عددياً فإننا نقول أنه لدينا تابع سلمي لموضع النقطة.
وبوجه عام يقال أن لهذا القطاع يوجد حقل سلمي أو حقل شعاعي بحسب الخاصية الفيزيائية المراد إظهارها فمثلاً، كثافة الشحنات الكهربائية لجسم محدود ومعزول هي تابع سلمي لموضع النقطة، وبالتالي الحقل الكهربائي المتولد عن هذه الشحنات هو تابع شعاعي لموضع النقطة، وهكذا فإن الشحنات الكهربائية قد ولدت حقلاً سلمياً للكثافة وحقلاً شعاعياً للقوى الكهربائية، ويمكننا أن نربط هذه الحقول الثلاثة بثلاثة توابع تتبع بأهمية خاصة في الفيزياء هي:

التدرج Gradient والتفرق Divergence والدوار Rotational.

1- التدرج Gradient:

تدرج الدالة السلمية (تابع سلمي) f: إن التدرج يؤثر على الحقول السلمية وينتج حقولاً شعاعية أي يعبر عن تغيرات الحقل السلمي، ويعيبه صفة شعاعية تساعدنا على تحديد جهة تلك التغيرات وأنه تفاضل الدالة بالنسبة للأبعاد الثلاثة (x, y, z)، فإذا كانت $f(x,y,z)$ الدالة السلمية فإن تدرجها مقدار شعاعي مركباته مشتقاتها الجزئية وهو معروف كالتالي:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \quad [1]$$

حيث أن الرمز $\vec{\nabla}$ هو مؤثر شعاعي تفاضلي نبلا (nabla) وهو يمثل الدالة تقوم بإنجاز نوع من العمليات على الدوال السلمية أو الشعاعية الاتية.

مثال: احسب تدرج الدالة: $f(x,y,z) = 4x^3y^2z$

الحل: حسب تدرج التابع باستعمال العلاقة [1] نجد:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = 12x^2y^2z\vec{i} + 8x^3yz\vec{j} + 4x^3y^2\vec{k}$$

مثال 2:

أوجد تدرج التابع السلمي: $f(x,y,z) = z^2 \cos(xy - \frac{\pi}{4})$

وذلك في النقطة $M(1, \frac{\pi}{2}, 1)$

الحل:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

نحسب إذن كل مشتق جزئي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -z^2 y \sin(xy - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -z^2 x \sin(xy - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \cdot \cos(xy - \frac{\pi}{4})$$

وفي النقطة $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$ نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, f = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

2- التباعد (التفرق): Divergence

التباعد أو ما يعرف بالتفرق يؤثر على الحقول الشعاعية وينتج عنه حقول سلمية وهو التباعد أو ما يعرف بالتفرق يؤثر على الحقول الشعاعية وينتج عنه حقول سلمية وهو المجال السلمي المؤثر بالاستقاق والصورة التحليلية لتباعد الشعاع هي:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2)$$

مثال: احسب تباعد الشعاع:

$$\vec{F}(x,y,z) = 3xz\,\vec{i} + 2xy^2z\,\vec{j} + yz\,\vec{k}$$

الحل: حساب التباعد باستعمال العلاقة (2) نجد:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = 3z + 4xyz + y$$

مثال: أوجد تفرق التابع الشعاعي:

$$\vec{F} = (-x+2y)\vec{i} + (2x-3y)\vec{j}$$

الحل:

$$F_x = -x+2y \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial x} = -1$$

$$F_y = 2x-3y \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial y} = -3$$

بتطبيق العلاقة (2):

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = -4$$

3 - الدوران (التوار): Rotationnel

دوار تابع شعاعي هو تابع شعاعي أيضاً يعرف كما يلي:

إذا كان لدينا الشعاع $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ أو $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

فإن الصورة التحليلية لتوار هذا الشعاع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (3)$$

مثال: عين دوران الحقل:

$$\vec{F}(x,y,z) = 4xy\,\vec{i} - 6yz^2\,\vec{j} + 18xy^3\,\vec{k}$$

الحل: لحساب دوران الحقل نستعمل العلاقة (3) فنجد:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = (54xy^2 + 12yz)\vec{i} - (18y^3 - 0)\vec{j} + (0 - 4x)\vec{k}$$

وعليه:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = (54xy^2 + 12yz)\vec{i} - 18y^3\vec{j} - 4x\vec{k}$$

- تتغير حركة النقطة المادية بثلاث مقادير حقائقية: حقل الموضع - حقل السرعة - حقل التسارع.

★ موضع المتحرك

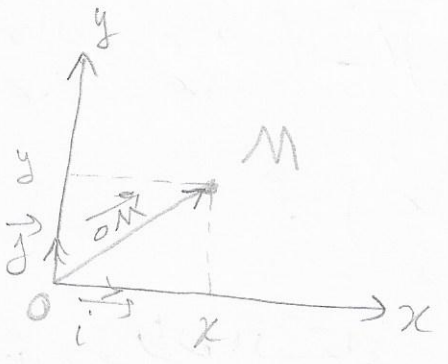
- حقل الموضع: هو حقل يدلنا على موضع المتحرك عند كل لحظة t، وبالتالي فهو الحقل المنطلق من مركز المعلم O إلى النقطة M موضع المتحرك. نرمز لحقل الموضع غالباً بالرمز $\vec{r}$، في معلم ديكارتي $R(O,x,y,z)$ يكتب حقل الموضع للنقطة $M(x,y,z)$ في الفضاء بالشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1)$$

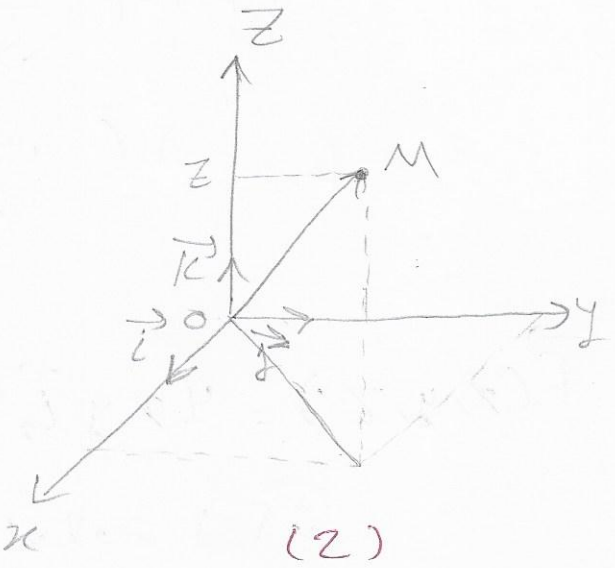
حيث $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الوحدة وفق المحاور (Ox, Oy, Oz)

حقل الموضع في المستوي (O,x,y) يكتب بالشكل:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2)$$



(1)



(2)

الشكل (1) شعاع الموضع في المستوي ، الشكل (2) شعاع طوطع في الفضاء

المعادلات الزمنية الحركة :

تكون النقطة M في حالة سكون إذا كانت الاحداثيات (x, y, z) مستقلة عن الزمن ، وتكون في حالة حركة إذا كانت هذه الاحداثيات توابع للزمن $x(t), y(t), z(t)$ تسمى هذه الدوال المعادلات الزمنية الحركة .

تعرف مسار النقطة المادية : بأنه المحل الهندسي للنقاط التي تمر بها النقطة المادية أثناء الحركة . ونلاحظ أن الحركة تكون في المستوي oxy عند $(z=0)$ دوماً ويكون المسار عندئذٍ منتمياً إلى المستوي oxy ، نستطيع في بعض حالات الحركة المستوية الحصول على معادلة هذا المسار في المستوي ، بحذف الزمن (t) فيما بين المعادلتين الزمنيتين للحركة $x(t)$ و $y(t)$.

مثال: تتحرك نقطة مادية في مستوٍ أفقي ، تحقق معادلاتها الزمنية الحركة كالتالي:

$$x = 5t \quad , \quad y = -t^2 + 2$$

اكتب عبارة شعاع الموضع ثم أوجد معادلة المسار.

الحل: نكتب شعاع الموضع لحظي للحالة (2):

$$\vec{OM} = \vec{r}(t) = (5t)\vec{i} + (-t^2+2)\vec{j}$$

نلاحظ أنّ شعاع الموضع متغير مع الزمن، فطوله ليس ثابتاً وكذلك اتجاهه.

نستطيع الحصول على معادلة المسار في المستوي، بحذف الزمن (t) ما بين المعادلتين الزمنيتين للحركة $x(t)$ و $y(t)$.

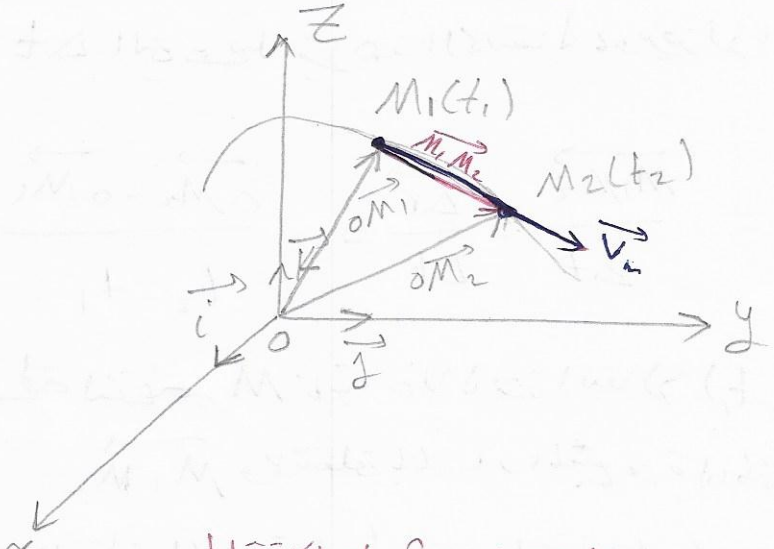
نلاحظ من عبارة $x(t)$ أن $t = \frac{x}{5}$ بالتعويض في عبارة $y(t)$ نجد:

$$y(t) = -\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 2 = -\frac{x^2}{25} + 2$$

المسار عبارة عن جزء من قطع مكافئ.

- شعاع الانتقال أو الازاحة:

يشغل المتحرك مواضع مختلفة خلال حركته، فإذا كان موضعه في اللحظة t_1 هو $M_1(x_1, y_1)$ المحدد بشعاع الموضع $\vec{r_1}$ ثم انتقل اللحظة t_2 إلى الموضع $M_2(x_2, y_2)$ الموافق لشعاع الموضع $\vec{r_2}$، فإن الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ يسمى شعاع الانتقال أو شعاع الازاحة.



الشكل (3): شعاع الانتقال بين الموضعين t_1 و t_2

من الشكل (3) نلاحظ أن: $\overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{oM_2}$

ومنه نكتب شعاع الانتقال كالتالي:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{oM_2} - \overrightarrow{oM_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \overrightarrow{\Delta r}$$

طويلة المحنية والتي تمثل الطول الفعلي للمسار الذي يسلكه المتحرك من النقطة M_1 إلى النقطة M_2 هو طول القوس $\overset{\frown}{M_1M_2}$.

شعاع الانتقال مستقل عن مبدأ الاحداثيات حيث أنه اذا اعتبرنا أن احداثيتي النقطتين M_1 و M_2 هما على الترتيب (x_1, y_1) و (x_2, y_2) فإن شعاع الموضع يكتب بالشكل التالي:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = o\overrightarrow{M_2} - o\overrightarrow{M_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

شعاع السرعة:

السرعة هي معدل تغير شعاع الموضع بالنسبة للزمن (أي معدل التغير في توقيت)، وهي كمية فيزيائية متجهة. أي أنها تقاس بالمقدار والاتجاه. لأن حركة النقطة تتميز بالقيمة والاتجاه.

يمكننا تعريف عبارتين للسرعة:

1) السرعة المتوسطة: السرعة المتوسطة للنقطة M هي نسبة انتقال $\overrightarrow{\Delta r}$ إلى المدة الزمنية Δt التي حصل فيها هذا الانتقال، ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{V_m}$ ونكتب بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{o\overrightarrow{M_2} - o\overrightarrow{M_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1}$$

السرعة المتوسطة لنقطة M بابة خلال زمن انتقال $\Delta t = (t_2 - t_1)$، وتكون موازية لشعاع الانتقال $\overrightarrow{M_1M_2}$ وتتعلق بالمسار المتبع من قبل المتحرك خلال المدة $(\Delta t = t_2 - t_1)$.

يمكننا أن ندرس حركة النقطة المادية في المستوى باعتبارها مركبة من حركتين مستقيمتين، لذلك ستكون للسرعة الوسطية مركبتين احداهما V_{xm} على المحور ox و V_{ym} على المحور oy. تعرف هاتين المركبتين بالعلاقتين التاليتين:

$$V_{xm} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad ، \quad V_{ym} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

وبالتالي كتابة شعاع السرعة المتوسطة بالشكل التالي:

$$\vec{V}_m = \vec{V}_{xm} + \vec{V}_{ym} = V_{xm}\vec{i} + V_{ym}\vec{j}$$

أو بالشكل:

$$\vec{V}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i} + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\vec{j} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

طويلة شعاع السرعة المتوسطة تكتب بالعلاقة:

$$V_m = \sqrt{V_{xm}^2 + V_{ym}^2} = \sqrt{\left(\frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right)^2}$$

=

2- السرعة اللحظية:

إن السرعة الحقيقية للنقطة M هي سرعتها في اللحظة t، وليست سرعتها في المدة الزمنية Δt.

عندما نجعل Δt تتناقص إلى الصفر يصبح حامل شعاع الانتقال $\overrightarrow{M_1M_2}$ مماساً للمسار في النقطة $M_1(x_1, y_1)$ تتناقص عندئذٍ شعاع السرعة المتوسطة إلى شعاع السرعة اللحظية وفي نفس الوقت تتناقص المركبتان $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$ إلى كميتين متقيدتين بالنسبة للزمن $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

على الترتيب ونكتب:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 - t_1} \frac{\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

حيث أن $d\vec{r} = \lim_{t_2 - t_1} \overrightarrow{\Delta r}$: تمثل شعاع الانتقال العنصري أو الإزاحة العنصرية

شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية M (لمركز عطالة الجسم) في لحظة t هو مشتق شعاع الموضع اللحظي للنقطة المادية M (لمركز عطالة الجسم) بالنسبة للزمن.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (*)$$

وحدة قياسها في الوحدات الدولية (m/s) أو $(m.s^{-1})$.

• شعاع السرعة اللحظية في لحظة ما (t) هو شعاع محمول على المماس على المسار الحركة في تلك اللحظة واتجاهه يكون في اتجاه الحركة دوماً.

ومنه يمكن أن نكتب شعاع السرعة اللحظية بالعبارة التالية:

$$\vec{V}(t) = V(t)\,\vec{e}_T$$

حيث $\vec{e}_T$ ما هو إلا شعاع الوحدة المحمول على المماس المسار تلك اللحظة كما في الشكل.

و $V(t)$ يمثل طويلة شعاع السرعة اللحظية:

الشكل (5) شعاع السرعة اللحظية

لشعاع السرعة اللحظية مركبتان V_x و V_y وفق المحورين (ox, oy) على الترتيب كما في الشكل (6)، مركبتا شعاع السرعة اللحظية وفق المحورين $(ox$ و $oy)$ اختصاراً يرمز لها بالرمز $(\dot{x}$ و $\dot{y})$ على الترتيب، نعبر عن هذا الاختصار كالتالي:

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{و} \quad \dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt}$$

يمكننا أن نكتب هذا الشعاع باستعمال هذا الاختصار بالشكل التالي:

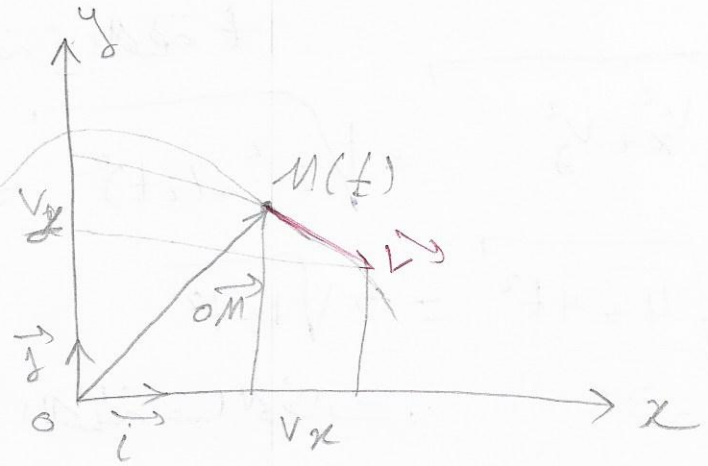
$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad (**)$$

يمثل طول هذا الشعاع في لحظة معينة t طويلة شعاع السرعة اللحظية أي قيمة السرعة والتي رمزنا لها بالرمز V وحسب العلاقة:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

في الفضاء تعطى طويلة شعاع السرعة اللحظية بالعبارة التالية:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$



الشكل (6) : شعاع السرعة اللحظية ومركباته وفق المحورين (oy, ox)

مثال: شعاع الموضع لنقطة مادية يكتب بالعبارة التالية:

$$\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + (t^2 - 4)\,\vec{j}$$

1- أوجد عبارة شعاع سرعة اللحظية ثم عين طويلته؟

2- احسب سرعة اللحظية عند اللحظات $t_1 = 1s$ و $t_2 = 3s$

الحل: 1- يمكن ايجاد عبارة شعاع السرعة اللحظية باستعمال العلاقة ☆ وذلك باشتقاق مركبات شعاع الموضع x و y.

باشتقاق شعاع الموضع x و y:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

أو باشتقاق مركبات شعاع الموضع x و y:

المركبة V_x:

$$x(t) = 2t \Rightarrow x' = V_x = \frac{dx}{dt} = 2$$

المركبة V_y:

$$y(t) = (t^2 - 4) \Rightarrow y' = V_y = \frac{dy}{dt} = 2t$$

وعليه عبارة شعاع السرعة اللحظية تكتب:

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$$

طويلة شعاع السرعة في اللحظة t:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \text{[illegible]}$$

$$= \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$$

2- شعاع سرعة الكرية عند اللحظات: $t_1 = 1S$ و $t_2 = 3S$

$$\vec{V}(1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow V(1) = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

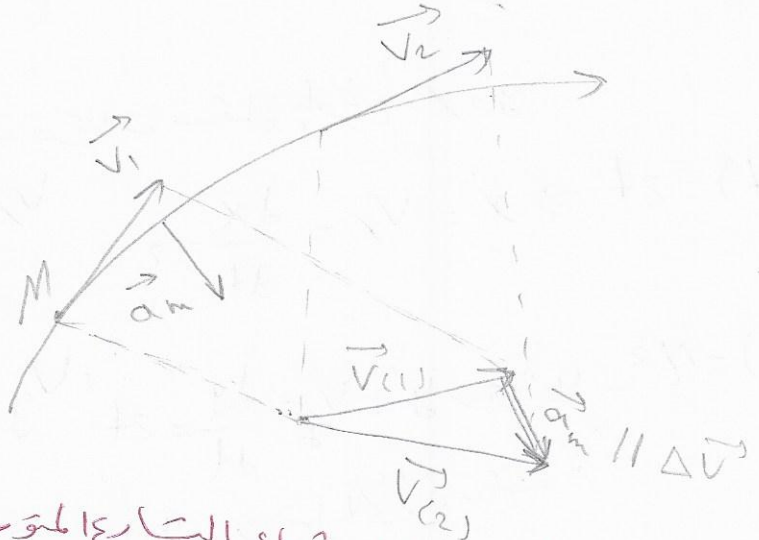
$$\vec{V}(3) = 2\vec{i} + 6\vec{j} \Rightarrow V(3) = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$$

3- شعاع التسارع:

• شعاع التسارع المتوسط:

شعاع التسارع المتوسط يعبر عن مقدار تغير شعاع السرعة للكرية بالنسبة للزمن، فإذا كانت النقطة المادية M تملك سرعة $\vec{V}(1)$ عند اللحظة t_1 وعند اللحظة t_2 أصبحت سرعتها $\vec{V}(2)$ نقول بأن النقطة المادية M تخضع لتسارع وذلك بسبب تغير سرعتها، نعرف شعاع التسارع المتوسط للنقطة المادية بين اللحظتين t_1 و t_2 بالعلاقة:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{V}(2) - \vec{V}(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$



الشكل (7) يمثل شعاع التسارع المتوسط.

شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ يوازي $\Delta\vec{V}$ ويتجه نحو تقعر المسار.

شعاع التسارع المتوسط للنقطة المادية يمكن أن نعبر عنه بالمركبتين a_{xm} و a_{ym} كما يلي:

$$\vec{a}_m = a_{xm}\vec{i} + a_{ym}\vec{j}$$

حيث

$$a_{xm} = \frac{\vec{V}_x(2) - \vec{V}_x(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}_x}{\Delta t}$$

$$a_{ym} = \frac{\vec{V}_y(2) - \vec{V}_y(1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}_y}{\Delta t}$$

- شعاع التسارع اللحظي:

شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}(t)$ للنقطة M هو نهاية شعاع التسارع المتوسط بين اللحظتين t_1 و t_2 عندما تتناهى t_2 إلى t_1 أي t_1 إلى t_2 (أي $\Delta t = t_2 - t_1$) تتناهى إلى الصفر، على حين تتناهى المركبتان $\frac{\Delta \vec{V}_x}{\Delta t}$ و $\frac{\Delta \vec{V}_y}{\Delta t}$ إلى حدودهما بالنسبة للزمن $\frac{d\vec{V}_x}{dt}$ و $\frac{d\vec{V}_y}{dt}$ على الترتيب:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j}$$

شعاع التسارع اللحظي للنقطة M هو مشتق شعاع السرعة اللحظية للنقطة M بالنسبة للزمن، وحدته في جملة الوحدات الدولية (m/s^2) أي $(m \cdot s^{-2})$ ويمكن أن نكتب:

$$\vec{a}(t) = V_x'\vec{i} + V_y'\vec{j} = x''\vec{i} + y''\vec{j}$$

وصف لشعاع التسارع اللحظي مركبتان a_x و a_y وفق المحورين ox و oy على الترتيب هما:

$$a_x = x'' = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad a_y = y'' = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ملاحظة: بما أن شعاع السرعة هو مشتق شعاع الموضع إذن شعاع التسارع هو المشتق الثاني لشعاع الموضع وعليه يمكن أن نكتب:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

طول شعاع التسارع في لحظة معينة t يمثل قيمة التسارع في تلك اللحظة ونعبر عنه بالعبارة

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

يكون اتجاه شعاع التسارع دوماً نحو تقعر مسار الحركة (أي داخل الانحناء)

ملاحظة: في فضاء ثلاثي الأبعاد يكون لشعاع التسارع العبارة التالية:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

حيث: a_z: هي مركبة شعاع التسارع وفق المحور oz.

مكتبة A to Z