كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الثانية /نظري/

نظرية المعادلات لطلاب السنة الرابعة ـ قسم الرياضيات

المحاضرة الثانية

نظرية الوجود والوحدانية:

بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية $x' = f(t,x)$ و $x(t_0) = x_0$ حيث f تابع معرف ومستمر على المنطقة $u \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ بحيث $(t_0, x_0) \in u$ و f يحقق شرط ليبشتز في x

أي أن $\quad \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\| x_1 - x_2\|$

وذلك من أجل جميع النقاط (t,x_2) و $(t,x_1) \in \mathcal{R}$ حيث

$$\mathcal{R} = \{(t,x);\ \ |t - t_0| \leq a\ \ , \|x - x_0\| \leq b\}$$

عندئذٍ يوجد $\delta > 0$ حيث $0 < \delta \leq \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}; M = \max_{\mathcal{R}}\|f(t,x)\|$ بحيث يكون لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد على المجال $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

ملاحظة عالهامش فيكن ما تشوفوها: سبب تعريف α : حتى نكون قادرين على العمل داخل R ولذلك نطلب أن يكون $\quad |t - t_0| \leq a$ و $\|\emptyset(t) - x_0\| \leq b$

بما أن $\quad |t - t_0| \leq \delta$ و $\delta \leq a \Longleftarrow \quad |t - t_0| \leq a$ (ولذلك فرضنا $\alpha \leq a$)

أما الفرض $\alpha \leq \frac{b}{m}$ جاء من:

نفرض $\emptyset(t)$ حل المسألة (1) معرف على $[t_0, t_0 + \alpha]$ وبالتالي من أجل $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$

$$\|\emptyset(t) - x_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\emptyset(s))ds\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f\big(s,\emptyset(s)\big)\|ds \leq M\int_{t_0}^{t} ds$$
$$\leq M(t - t_0)$$

من أجل $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$ نجد بالمثل

$$\|\emptyset(t) - x_0\| \leq -M(t - t_0)$$

فيكون لدينا على كامل المجال

$$\|\emptyset(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq M\frac{b}{M} \leq b$$

أي أنه بأخذ $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ فإنه يضمن تحقق الشرطين وبالتالي يضمن العمل داخل المنطقة $\mathcal{R}$.

نبرهن النظرية بطريقتين: الطريقة الأولى هي طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكارد) والطريقة الثانية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة.

نبرهن أولا باستخدام طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيكارد)

نعتمد في هذه الطريقة على استخدام الشكل التكاملي لحل مسألة القيم الابتدائية

$$\emptyset(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,\emptyset(s)\big)ds \qquad (2)$$

لبناء متتالية من الحلول التقريبية $\emptyset_m(t)$ والمتقاربة من الحل الحقيقي وتكون على الشكل التالي

الخطوة الأولى: نأخذ القيمة الابتدائية كتقريب ابتدائي للحل أي

$$\emptyset_0(t)=x_0$$

الخطوة الثانية: نستخدم $\emptyset_0$ في المعادلة (2) لبناء العنصر الثاني من المتتالية

$$\emptyset_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,\emptyset_0(s)\big)ds$$

الخطوة الثالثة: نستخدم $\emptyset_1$ في المعادلة (2) لبناء العنصر الثالث من المتتالية

$$\emptyset_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,\emptyset_1(s)\big)ds$$

وهكذا نستخدم $\emptyset_{m-1}$ لبناء العنصر $\emptyset_m$ من المتتالية

$$\emptyset_m(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,\emptyset_{m-1}(s)\big)ds$$

وبالتالي نحصل على متتالية من الحلول التقريبية $\emptyset_0,\emptyset_1\,,\emptyset_2 \dots\ \emptyset_m,\dots$

أولاً: نبرهن أن $\big(t,\emptyset_m(t)\big)\in\mathcal{R}$ عندما $|t-t_0|\le\alpha$ أي لنبرهن أنه عندما $|t-t_0|\le\alpha$ فإن

$$\|\emptyset_m(t)-x_0\|\le b \ \text{ و }\ |t-t_0|\le a$$

بما أن $\alpha\le a \Leftarrow |t-t_0|\le a$

نبرهن باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي أن $\|\emptyset_m(t)-x_0\|\le b$

أي نثبت صحة العلاقة من أجل $m=1$ أي نثبت: $\|\emptyset_1(t)-x_0\|\le b$

$$\|\emptyset_1(t)-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,ds\right\|\le\int_{t_0}^{t}\|f(s,x_0)\|ds\le M\int_{t_0}^{t}ds$$

$$\le M|t-t_0|\le M\alpha\le M\frac{b}{M}\le b$$

نفرض صحة العلاقة من أجل $m=k$ ونبرهن صحتها من أجل $m=k+1$

$$\|\emptyset_{k+1}(t)-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\emptyset_k(s))\,ds\right\|\le\int_{t_0}^{t}\|f(s,\emptyset_k(s))\|ds\le M\int_{t_0}^{t}ds$$

$$\le M|t-t_0|\le M\alpha\le M\frac{b}{M}\le b$$

وبالتالي العلاقة صحيحة من أجل جميع قيم m أي $\mathcal{R}\ni\big(t,\emptyset_m(t)\big)$.

ثانياً: نبرهن أن المتتالية $\emptyset_m(t)$ متقاربة وتتقارب نحو الدالة $\emptyset(t)$ ، يمكن أن نكتب

$$\emptyset_0+(\emptyset_1-\emptyset_0)+(\emptyset_2-\emptyset_1)+(\emptyset_3-\emptyset_2)+\cdots+(\emptyset_m-\emptyset_{m-1})+\cdots$$

$$=\emptyset_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\emptyset_m-\emptyset_{m-1})\qquad\ldots(*)$$

متسلسلة متتالية مجاميعها الجزئية هي

$$\emptyset_0+(\emptyset_1-\emptyset_0)+(\emptyset_2-\emptyset_1)+(\emptyset_3-\emptyset_2)+\cdots+(\emptyset_m-\emptyset_{m-1})=\emptyset_m$$

أي أن $\emptyset_m$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $(*)$ وبالتالي فإذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة فإن متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة أي $\emptyset_m$ متقاربة لذلك نبرهن أن المتسلسلة $(*)$ متقاربة

لبرهان أن المتسلسلة $(*)$ متقاربة نبرهن أنها متقاربة نظيمياً

أي يجب أن نبرهن أن $\|\emptyset_0(t)\|+\sum_{m=1}^{\infty}\|\emptyset_m-\emptyset_{m-1}\|$ متقاربة

$$\|\emptyset_1(t)-\emptyset_0\|=\|\emptyset_1(t)-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,ds\right\|\le M|t-t_0|$$

$$\|\emptyset_2(t)-\emptyset_1(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f\big(s,\emptyset_1(s)\big)ds-\int_{t_0}^{t} f(s,\emptyset_0)\,ds\right\|$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\big\|f\big(s,\emptyset_1(s)\big)-f(s,\emptyset_0)\big\|ds\le\int_{t_0}^{t}L\|\emptyset_1(s)-\emptyset_0(s)\|ds$$

$$\le ML\int_{t_0}^{t}|s-t_0|ds\le ML\frac{|t-t_0|^2}{2!}$$

وهكذا نجد

$$\|\emptyset_m(t)-\emptyset_{m-1}(t)\|\le ML^{m-1}\frac{|t-t_0|^m}{m!}\le ML^{m-1}\frac{\alpha^m}{m!}$$

$$\|\emptyset_0(t)\|+\sum_{m=1}^{\infty}\|\emptyset_m-\emptyset_{m-1}\|\le x_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(L\alpha)^m}{m!}\qquad(**)$$

سلسلة متقاربة بانتظام ومجموعها $e^{L\alpha}-1$

وبالتالي السلسلة $(**)$ متقاربة يؤدي $(*)$ متقاربة نظيمياً أي متقاربة فإن متتالية مجامعيها الجزئية $\emptyset_m(t)$ متقاربة ولنرمز لنهايتها بـ $\emptyset(t)$.

ثالثاً: نبرهن أن $\emptyset(t)$ حل للمسألة القيم الابتدائية (يحقق المعادلة التكاملية)

$$\emptyset_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \emptyset_{m-1}(s)\big)ds \qquad (3)$$

$$\emptyset(t) = \lim_{m\to\infty} \emptyset_m(t)$$

f مستمر

$\emptyset_m$ تسعى لـ $\emptyset$

$$f\big(s, \emptyset_{m-1}(s)\big) \longrightarrow f\big(s, \emptyset(s)\big)$$

بأخذ نهاية (3) عندما $m \leftarrow \infty$ نحصل على

$$\emptyset(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \emptyset(s)\big)ds$$

فإن $\emptyset$ يحقق المعادلة التكاملية

رابعاً: نثبت الآن وحدانية الحل

نفرض $\emptyset$ و $\overline{\emptyset}$ حلين للمعادلة التكاملية أي

$$\emptyset(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \emptyset(s)\big)ds$$

$$\overline{\emptyset}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \overline{\emptyset}(s)\right)ds$$

$$\begin{aligned}\| \emptyset(t) - \overline{\emptyset}(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, \emptyset(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{\emptyset}(s))\, ds\right\| \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} \| \emptyset(s) - \overline{\emptyset}(s)\| ds\end{aligned}$$

ولنعرف

$$U(t)=\int_{t_0}^{t}\|\ \emptyset(s)-\bar{\emptyset}(s)\|ds$$

وعليه فإن:

1- $U(t_0)=0$

2- $U(t)\geq 0$; $t_0\leq t$. ($U(t)\leq 0$; $t_0\geq t$ في حال)

3- $U'(t)=\|\ \emptyset(t)-\bar{\emptyset}(t)\|$

$$U'(t)\leq LU(t)\Longrightarrow U'(t)-LU(t)\leq 0$$

$$\int_{t_0}^{t}(U(s)\,e^{-Ls})'ds\leq 0$$

$$U(t)\,e^{-Lt}-U(t_0)\,e^{-Lt_0}\leq 0$$

$$\Longrightarrow\ U(t)\,e^{-Lt}\leq 0\quad\Longrightarrow\ U(t)\leq 0$$

$\Longrightarrow\ U(t)=0\quad\Longrightarrow\ U'(t)=0\quad\Longrightarrow\ \emptyset(t)=\bar{\emptyset}(t)\quad\Longrightarrow$ الحل وحيد.

نبرهن الآن نظرية الوجود والوحدانية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة

مبرهنة النقطة الثابتة:

بفرض B فضاء باناخ ولتكن B_1 مجموعة مغلقة في B وليكن $F: B_1\to B_1$ مؤثر يحقق شرط لبيشتز بثابت $L<1$ (يسمى L في هذه الحالة مؤثر مقلص) أي

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|\leq L\|x_1-x_2\|\qquad x_1,x_2\in B_1$$

عندئذٍ يكون للمعادلة $Fx=x$ حل وحيد في B_1 هو $x=x(t)$.

برهان نظرية الوجود والوحدانية باستخدام النقطة الثابتة:

من أجل برهان نظرية الوجود والوحدانية باستخدام النقطة الثابتة نضع المسألة ضمن فضاء باناخ مناسب B على شكل معادلة من النمط $x=Fx$

لنعرف المؤثر F بالشكل

$$F: x\longrightarrow\ x_0+\int_{t_0}^{t}f\big(s,x(s)\big)ds$$

تصبح مسألة القيم الابتدائية بالشكل $\qquad x=Fx$

$$Fx=x_0+\int_{t_0}^{t}f\big(s,x(s)\big)ds$$

حيث $Fx(t)$ دالة مستمرة في t

وبالتالي فإن حلول مسألة القيم الابتدائية هي نقط ثابتة للمؤثر F أي أنه إذا أثبتنا أن للمؤثر F نقطة ثابتة وحيدة نكون قد أثبتنا أن لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد.

سنكتفي بالبرهان من أجل $t - t_0 \leq \delta$ حيث أن البرهان مماثل تماماً في حالة $t_0 - t \leq \delta$
ليكن X فضاء التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[t_0, t_0 + \delta]$
أي $X = C[t_0, t_0 + \delta]$

$$\|x\|_c = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|x(t)\|$$

ولنأخذ

$$X \supset S = \{x \in X \ ; \ \|x - x_0\|_c \leq b\}$$

وكذلك فإن S مجموعة مغلقة في X، وبالتالي أصبح لدينا

$$S = B_1 \quad \text{و} \ X = B$$

ننجز البرهان في ثلاث خطوات

الخطوة الأولى:

نبرهن أن

$$F: S \longrightarrow S$$

أي نبرهن أنه من أجل $\emptyset \in S$ فإن $F\emptyset \in S$
أي نريد برهان أن $\|F\emptyset - x_0\|_c \leq b$

$$F\emptyset(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} (f(s, \emptyset(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0))\, ds$$

$$\|F\emptyset(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} (\|f(s, \emptyset(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|)\, ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \|\emptyset(s) - x_0\| ds + \int_{t_0}^{t} M\, ds$$

بما أن $\emptyset \in S \quad \Longleftarrow$

$$\|\emptyset(s) - x_0\| \leq \|\emptyset - x_0\|_c \leq b$$

$$\forall \emptyset \in S; \|F\emptyset(t) - x_0\| \leq Lb \int_{t_0}^{t} ds + \int_{t_0}^{t} M\, ds \leq (Lb + M)(t - t_0)$$

$$\max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|F\emptyset(t) - x_0\| \leq (Lb + M)(t - t_0)$$

$$\Longrightarrow \|F\emptyset - x_0\|_c \leq (Lb + M)\delta$$

نختار $\delta \leq \frac{b}{Lb + M}$

$$\Longrightarrow \|F\emptyset - x_0\|_c \leq b \quad \Longrightarrow F\emptyset \in S$$

$$\forall \emptyset \in S \ \Longrightarrow F\emptyset \in S \Longrightarrow F: S \longrightarrow S$$

الخطوة الثانية:

هي أن نبرهن أن f مؤثر مقلص أي يحقق شرط ليبشتز بمؤثر $L < 1$
ليكن $S \ni \emptyset_2, \emptyset_1$

$$\|F\emptyset_1(t) - F\emptyset_2(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f\left(s, \emptyset_1(s)\right) - f\big(s, \emptyset_2(s)\big)\Big)\, ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|f\,(s, \emptyset_1(s)) - f(\,s, \emptyset_2(s))\|\ ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \|\emptyset_1(s) - \emptyset_2(s)\|\ ds$$

$$\leq L\, \|\emptyset_1 - \emptyset_2\|_c \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\leq L\, \delta\, \|\emptyset_1 - \emptyset_2\|_c$$

$$\leq \rho \|\emptyset_1 - \emptyset_2\|_c$$

نختار $\delta < \frac{1}{L}$ حتى يكون $\rho = L\delta < 1$

أصبحت شروط مبرهنة النقطة الثابتة محققة وبالتالي للمعادلة $Fx = x$ حل وحيد في S أي لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد في$S \supseteq X$.

الخطوة الثالثة:

بقي أن نبرهن أنه لا يوجد حلول لمسألة القيم الابتدائية خارج S

كل حل لمسألة القيم الابتدائية هو عبارة عن تابع مستمر وبالتالي هو تابع من الفضاء X

$$X = c[t_0, t_0 + \delta];\, x_0 \in S$$

سنبرهن أن الحل$\emptyset(t)$ الذي يبدأ من $x_0 \in S$ باللحظة t_0 لن يغادر S

نفرض جدلا أن هذا الحل سيغادر S أي أنه يوجد لحظة $t_0 \leq t$ بحيث يكون

$$\|\emptyset(t) - x_0\| = b$$

أي أن الحل سيقطع الحد ليخرج خارج المجموعة S ولتكن $t_0 \leq \tau$ أول لحظة ممكنة لهذا التقاطع

$$\|\emptyset(\tau) - x_0\| = b$$

$$\forall t_0 \leq t \leq \tau$$

$$\|\emptyset(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} (\|f(s, \emptyset(s) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|\,)ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} (L\|\,\emptyset(s) - x_0\| + M)ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} (L\, b + M) ds \leq (Lb + M)\, |t - t_0|$$

عندما $t = \tau$ نجد

$$b = \, ||\emptyset(\tau) - x_0|| \leq (Lb + M)(\tau - t_0) \leq (\mathrm{L\ b + M})\mu$$

$$\tau = t_0 + \mu$$

$$\Longrightarrow \mu \geq \frac{b}{Lb + M} \geq S$$

الحل $\emptyset(t)$ يبقى محصورا داخل S وبالتالي لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد في X.

--------انتهت المحاضرة --------

مدرسة المقرر

د. منال ناصر حسين