كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية المعادلات

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

نظرية المعادلات لطلاب السنة الرابعة ـ قسم الرياضيات

المحاضرة الأولى

المعادلات التفاضلية التي رأيناها في مقرر معادلات 1-2 كانت قابلة للحل بشكل مباشر" أي الحل على شكل تابع تحليلي" ولكن أغلب المعادلات التفاضلية غير الخطية يتعذر حلها بالطرق المعروفة والتي رأيناها سابقاً، وأغلب النظم الفيزيائية تقودنا إلى معادلات تفاضلية غير خطية ولدراسة هذه النظم الفيزيائية وبما أنه لا يمكن حل المعادلات التفاضلية التي تضبطها، علينا دراسة خواص هذا الحل بدون التعرض لإيجاد صيغته، وهذا ماسنقوم به في هذا المقرر الذي يهتم بدراسة خواص الحل من وجود ووحدانية و استقرار.......

سنحتاج بعض مفاهيم من التحليل الدالي:

الفضاء الشعاعي: نقول عن مجموعة B غير خالية يأنها فضاء خطي إذا عرفنا عليها عمليتين $(+)$ و $(.)$ ويجب أن تكون $(+)$ تبديلية، تجميعية، تقبل عنصر حيادي، ولكل عنصر نظير، أما $(.)$ يجب أن تكون تجميعية، توزيعية على الجمع وتقبل عنصر حيادي.

الفضاء المنظم: بفرض B فضاء شعاعي، نقول عن B أنه فضاء منظم إذا قابلنا كل عنصر a بعدد حقيقي موجب ||a|| يحقق:

a) $\|a\| \geq 0 \quad , \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$
b) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$
c) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

الفضاء التام: هو فضاء منتظم وكل متتالية لكوشي فيه تكون متقاربة فيه.

فضاء باناخ: هو فضاء منظم تام.

المؤثر: ليكن F, E فضائين منتظمين ولتكن D مجموعة جزئية من E

$$T: D \longrightarrow F$$

نسمي T مؤثراً

إذا كان $F = \mathbb{R}$ أو $F = \mathbb{C}$ نسميT مؤثر دالي

- نقول عن T أنه مؤثر خطي إذا كان T فضاء خطي جزئي من E وكان

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

- نقول عن T أنه مؤثر مستمر في x_0 إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \delta > 0 \ ; \|x - x_0\|_E < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|T(x) - T(x_0)\|_E < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

- نقول عن T أنه يحقق شرط ليبشتز إذا وجد ثابت k يحقق

$$||Tx - Ty|| \le k\,||x - y||$$

نسمي K ثابت ليبشتز.

ملاحظة: المؤثر الذي يحقق شرط ليبشتز هو مؤثر مستمر.

مفاهيم عامة:

تذكرة: الشكل العام لمعادلة تفاضلية من المرتبة n

$$F\left(t, x, x', \dots, x^{(n)}\right) = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$t \in I \subseteq \mathbb{R}$ هو المتحول المستقل

$x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ هو التابع

أما الشكل النظامي لمعادلة تفاضلية من المرتبة n يكون بالشكل:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

ملاحظة 1: ليس من الممكن دائماً كتابة المعادلة التفاضلية بالشكل النظامي "محلولة بالنسبة لأعلى مشتق"

ملاحظة 2: سنعتمد من أجل تبسيط الدراسة الشكل النظامي لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى

$$x' = f(t, x) \qquad \dots\dots\dots\dots (3)$$

ملاحظة 3: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة n مكتوبة بالشكل النظامي فإنه يمكن تحويلها إلى جملة من n معادلة كل منها من المرتبة الأولى وذلك بفرض:

$$x = y_1, \qquad x' = y_2 \;\dots .\, x^{(n-1)} = y_n$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3 \;\; \dots \; y_n' = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

لذلك كل المفاهيم التي سنبحثها لاحقاً ستكون من أجل معادلة من المرتبة الأولى وجميع المفاهيم تبقى صالحة من أجل معادلة من المرتبة n .

تعريف مسألة القيم الابتدائية (IVP):

مسألة القيم الابتدائية للمعادلة (3) تعطى بالشكل:

$$x' = f(t, x) \qquad \dots\dots\dots (4)$$

$$x(t_0) = x_0$$

حيث f تابع حقيقي معرف ومستمر على $u \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ حيث $(t_0, x_0) \in u$.

تعريف مسألة القيم الابتدائية لمعادلة من المرتبة n:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots\ , x^{(n-1)}\right)$$

$$x(t_0) = m_1, \qquad x'(t_0) = m_2\ \dots . x^{(n-1)}(t_0) = m_n$$

و هي تكافئ

$$y' = f(t, y)$$

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

تعريف حل معادلة تفاضلية:

نقول عن تابع $\phi(t)$ أنه حل للمعادلة (3) إذا حقق هذه المعادلة أي $\phi' = f(t, \phi)$ من أجل كل $t \ni I \supset \mathbb{R}$ بحيث $(t, \phi(t)) \ni u$ مع الشرط $\phi(t_0) = x_0$.

تعريف الشكل التكاملي

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \phi(s)\right) ds$$

وهو الشكل التكاملي لحل مسألة القيم الابتدائية (4).

نظرية: بفرض f تابع مستمر على منطقة $u \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ولتكن $(t_0, x_0) \ni u$

و ϕ تابع معرف على مجال $I \supset R$ حيث $t_0 \ni I$ وعندها يكون ϕ حل لمسألة القيم الابتدائية (4) إذا وفقط إذا

1) $\forall t \in I\ ; (t, \phi(t)) \in u$
2) ϕ تابع مستمر
3) $\forall t \in I\ ;\ \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \phi(s)\right) ds$

برهان النظرية :

$\Leftarrow$الاتجاه الأول : ليكن $\phi(t)$ حل لمسألة القيم الابتدائية *(4)* أي يحقق

$\phi'(t) = f\left(t . \phi(t)\right)\ ; t \in I$ من أجل كل

$$\phi(t_0) = x_0 \qquad . (t . \phi(t)) \in u$$

يكون لدينا بالمكاملة :

$$\phi(\mathrm{t})-\phi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f\big(s.\phi(s)\big)ds \ \Rightarrow \phi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s.\phi(s)\big)ds$$

$\Longrightarrow$الاتجاه الثاني : بفرض (1) و(2) و(3) محققة نشتق (3)

$$\phi'(\mathrm{t})=\mathrm{f}\big(\mathrm{t}.\phi(\mathrm{t})\big)$$

نعوض $t=t_0$ في (3) فنجد : $\phi(t_0)=x_0$

بالتالي ϕ حل لمسألة القيم الابتدائية (4)

--------انتهت المحاضرة --------

مدرسة المقرر

د. منال ناصر حسين