كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تبولوجيا ٢

المحاضرة : الاولى /عملي/

تمارين (1)

التمرين الأول:

لتكن الأسرة $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أثبت أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$، ثم أوجد $V(5)$ و $V(7)$.

التمرين الثاني:

لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ التبولوجيا :

$$\tau = \{T_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n = 1,2,3, \dots\} \cup \{\emptyset\}$$

و لنأخذ المجموعات: $A = \{1,2, \dots, n\}$ و $B = \{1,3,5, \dots\}$

أوجد $A^{\circ}, ex(A), B^{\circ}, ex(B)$

التمرين الثالث:

إذا كانت X مجموعة غير منتهية كيفية، و τ_{cof} تبولوجيا المتممات المنتهية (تبولوجيا زاريسكي) على X و لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (X, τ_{cof})، و المطلوب: إيجاد $A^{\circ}, ex(A)$ في هذا الفضاء.

التمرين الرابع:

لتكن A, B مجموعتين كيفيتين من نقاط (X, τ) فضاء تبولوجي، أثبت صحة الخواص الآتية:

1. $ex(A \cup B) = ex(A) \cap ex(B)$ هل $ex(A \cap B) = ex(A) \cup ex(B)$؟
2. $ex(A) = ex\big(X \backslash ex(A)\big)$
3. $(A \backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \backslash B^{\circ}$ هات مثالاً عن عدم التساوي.
4. $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$
5. $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$ **و برهن بمثال عدم صحة الاحتواء المعاكس.**

أ. نوره العسلي.

تمارين (1)

التمرين الأول:

لتكن الأسرة $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أثبت أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$، ثم أوجد $V(5)$ و $V(7)$.

الحل:

1. لدينا من تعريف الأسرة τ أن $\emptyset \in \tau$ و بما أن $\{1,2,5\} \subseteq \mathbb{N}$ فإن $\mathbb{N} \in \tau$
2. لنأخذ الأسرة الكيفية $\{T_i, T_i \in \tau, i \in I\}$ هذا يعني أن:

$$\underline{T_i \in \mathrm{P}(\mathbb{N}) \;\&\; \{1,2,5\} \subseteq \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}}$$

و منه إن $\{1,2,5\} \subseteq \bigcup_{i\in I} T_i \;\&\; \bigcup_{i\in I} T_i \in P(\mathbb{N})$

و هذا يعني أن $\bigcup_{i\in I} T_i \in \tau$

3. أياً كان $T, G \in \tau$ فإن:

$$T, G \in P(\mathbb{N}) \;\&\; \{1,2,5\} \subseteq T \;\&\; \{1,2,5\} \subseteq G$$

بالتالي: $\{1,2,5\} \subseteq T \cap G \;\&\; T \cap G \in P(\mathbb{N})$

و هذا يعني أن $T \cap G \in \tau$

من تحقق الشروط الثلاث نجد أن τ تعرف تبولوجيا على $\mathbb{N}$

$V(5)$:

$$V \in V(5) \Leftrightarrow \exists T \in \tau : 5 \in T \subseteq V$$

لكن $5 \in T$ لأن $\{1,2,5\} \subseteq T$ أياً كانت $\mathrm{T} \in \tau$

$$V(5) = \{V \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5\} \subseteq V\}$$

$V(7)$:

$V \in V(7) \Leftrightarrow \exists T \in \tau : 7 \in T \subseteq V$ و بما أن $\{1,2,5\} \subseteq T$ أياً كانت $\mathrm{T} \in \tau$

أصبح لدينا $\{1,2,5,7\} \subseteq T$ و منه $V(7) = \{V \in P(\mathbb{N}) : \{1,2,5,7\} \subseteq V\}$

التمرين الثاني:

لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ التبولوجيا :

$$\tau = \{T_n = \{n, n+1, n+2, \dots.\} : n = 1,2,3, \dots.\} \cup \{\emptyset\}$$

و لنأخذ المجموعات: $A = \{1,2, \dots\dots, n\}$ و $B = \{1,3,5, \dots \dots\}$

أوجد $A^\circ, ex(A), B^\circ, ex(B)$

الحل:

من تعريف الأسرة τ نلاحظ أن أي مجموعة مفتوحة غير خالية هي مجموعة غير منتهية و المجموعة A منتهية بالتالي فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في A هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و هذا يعني أن $A^{\circ} = \emptyset$.

$ex(A) = (\mathbb{N}\backslash A)^{\circ}$ نلاحظ أن $\mathbb{N}\backslash A = \{n+1, n+2, \dots\dots\} = T_{n+1} \in \tau$

و منه $ex(A) = (\mathbb{N}\backslash A)^{\circ} = \mathbb{N}\backslash A$

بالنسبة للمجموعة B فإننا نلاحظ أنه بالرغم من كونها غير منتهية إلا أنها لا تحوي جميع الأعداد الطبيعية التالية لعدد طبيعي مثبت أي أنها لا تحوي أي مجموعة من النمط $T_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$ و بالتالي فالمجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في B هي المجموعة الخالية $\emptyset$ و هذا يعني أن $B^{\circ} = \emptyset$.

$ex(B) = (\mathbb{N}\backslash B)^{\circ}$ لكن $\mathbb{N}\backslash B = \{2,4,6, \dots\dots\}$ عندئذٍ بمناقشة مماثلة نجد أن $ex(B) = (\mathbb{N}\backslash B)^{\circ} = \emptyset$.

<u>التمرين الثالث:</u>

إذا كانت X مجموعة غير منتهية كيفية، و τ_{cof} تبولوجيا المتممات المنتهية (تبولوجيا زاريسكي) على X و لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (X, τ_{cof})، و المطلوب: إيجاد $A^{\circ}, ex(A)$ في هذا الفضاء.

الحل:

$$\tau_{cof} = \left\{T \in P(X) : X\backslash T \text{ مجموعة منتهية}\right\} \cup \{\emptyset\}$$

لدينا $X = T \cup (X\backslash T)\ , \forall T \in \tau_{cof}\backslash\{\emptyset\}$ و بما أن $X\backslash T$ مجموعة منتهية بحسب تعريف الأسرة τ_{cof} و X مجموعة غير منتهية فهذا يقتضي أن االمجموعة T هي مجموعة غير منتهية.

و بما أن المجموعة A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي فهي إما منتهية أو غير منتهية، لذلك نناقش الحالات الآتية:

أولاً: إذا كانت A مجموعة منتهية عندئذٍ المساواة $X = A \cup (X\backslash A)$ تقتضي ان تكون $X\backslash A$ مجموعة غير منتهية.

بما أن A مجموعة منتهية و جميع عناصر τ_{cof} باستثناء المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعات غير منتهية فإن المجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في A هي المجموعة الخالية و بالتالي هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A و هذا يعني أن: $A^{\circ} = \emptyset$.

$$ex(A) = (X\backslash A)^{\circ}$$

بما أن $X\backslash A$ مجموعة غير منتهية و متممتها A مجموعة منتهية فإن $X\backslash A \in \tau_{cof}$ و منه $(X\backslash A)^{\circ} = X\backslash A$ أي أن $ex(A) = X\backslash A$

ثانياً: المجموعة A مجموعة غير منتهية و متممتها $X\backslash A$ مجموعة منتهية

في هذه الحالة نلاحظ أن المجموعة A تحقق تعريف الأسرة τ_{cof} و هذا يعني أن $A^{\circ} = A$

$$ex(A) = (X\backslash A)^{\circ}$$

بما أن $X\backslash A$ مجموعة منتهية و متممتها A مجموعة غير منتهية فبمناقشة مماثلة للحالة الأولى نجد $(X\backslash A)^{\circ} = \emptyset$ أي أن $ex(A) = \emptyset$

ثالثاً: المجموعة A مجموعة غير منتهية و متممتها $X\backslash A$ مجموعة غير منتهية

لنفرض جدلاً وجود مجموعة مفتوحة غير خالية مثل T بحيث أنها محتواة في المجموعة A أي $T \subseteq A$ عندئذٍ يكون $X\backslash A \subseteq X\backslash T$ و لكن $X\backslash T$ مجموعة منتهية بحسب كون $T \in \tau_{cof}$ ، أصبح لدينا المجموعة غير المنتهية $X\backslash A$ محتواة في المجموعة المنتهية $X\backslash T$ و هذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ بوجود مجموعة مفتوحة غير خالية مثل T بحيث أنها محتواة في المجموعة A، فالصحيح أن المجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في المجموعة A هي المجموعة الخالية أي أن : $A^{\circ} = \emptyset$.

بمناقشة مماثلة نجد أيضاً أن

$$ex(A) = (X\backslash A)^{\circ} = \emptyset$$

التمرين الرابع:

لتكن A, B مجموعتين كيفيتين من نقاط (X, τ) فضاء تبولوجي، أثبت صحة الخواص الآتية:

1. $ex(A \cup B) = ex(A) \cap ex(B)$

الحل:

$$\forall x \in ex(A \cup B) \Leftrightarrow \exists T \in \tau : x \in T \subseteq X\backslash(A \cup B) = (X\backslash A) \cap (X\backslash B)$$

$$x \in T \subseteq (X\backslash A) \cap (X\backslash B) \Leftrightarrow x \in T \subseteq X\backslash A \;\&\, x \in T \subseteq X\backslash B$$
$$\Leftrightarrow x \in ex(A) \;\&\; x \in ex(B)$$
$$\Leftrightarrow x \in ex(A) \cap ex(B)$$

هل $ex(A \cap B) = ex(A) \cup ex(B)$؟

في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{|.|})$ لنأخذ المجموعتين $B = \{a, b\}$, $A =]a, b]$ فيكون $A \cap B = \{b\}$

$$\mathbb{R}\backslash A =]-\infty, a] \cup]b, +\infty[\Longrightarrow ex(A) = (\mathbb{R}\backslash A)^{\circ} =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$$

$$\mathbb{R}\backslash B =]-\infty, a[\cup]a, b[\cup]b, +\infty[\Longrightarrow ex(B) = (\mathbb{R}\backslash B)^{\circ}$$
$$=]-\infty, a[\cup]a, b[\cup]b, +\infty[$$
$$ex(A \cap B) = ex(\{b\}) = (\mathbb{R}\backslash\{b\})^{\circ} = \mathbb{R}\backslash\{b\}$$

إن $ex(A) = \mathbb{R}\backslash[a,b]$ & $ex(B) = \mathbb{R}\backslash\{a,b\}$

مما سبق نجد أن: $ex(A) \cup ex(B) = \mathbb{R}\backslash\{a,b\}$

و هذا يعني أن العلاقة غير $ex(A \cap B) = \mathbb{R}\backslash\{b\} \neq \mathbb{R}\backslash\{a,b\} = ex(A) \cup ex(B)$ صحيحة بالضرورة.

2. $ex(A) = ex\big(X\backslash ex(A)\big)$

$$ex\big(X\backslash ex(A)\big) = \Big(X\backslash\big(X\backslash ex(A)\big)\Big)^{\circ} = \big(ex(A)\big)^{\circ} = ex(A)$$

($ex(A)$ مجموعة مفتوحة)

3. $(A\backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}\backslash B^{\circ}$ هات مثالاً عن عدم التساوي.

$A\backslash B \subseteq A \Longrightarrow (A\backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}$

$(A\backslash B)^{\circ} \subseteq A\backslash B = A \cap (X\backslash B) \subseteq X\backslash B \subseteq X\backslash B^{\circ}$

$(A\backslash B)^{\circ} \subseteq X\backslash B^{\circ}$

$(A\backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \cap X\backslash B^{\circ} = A^{\circ}\backslash B^{\circ}$

$(A\backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}\backslash B^{\circ}$

الاحتواء المعاكس غير محقق بالضرورة كما يبين المثال الآتي:

لنأخذ $X = \{a,b,c\}$ مع التبولوجيا $\tau = \{X, \emptyset, \{a,b\}\}$

و لتكن $A = \{a,b\}\,, B = \{a,c\}$

نلاحظ أن $A^{\circ} = A\,, B^{\circ} = \emptyset$ فيكون $A^{\circ}\backslash B^{\circ} = A\backslash\emptyset = A$

و $A\backslash B = \{b\}$ و $(A\backslash B)^{\circ} = \emptyset$ بالتالي $(A\backslash B)^{\circ} \neq A^{\circ}\backslash B^{\circ}$

4. $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

$A \cap B \subseteq A \;\Longrightarrow (A \cap B)^{\circ} \subseteq A^{\circ}$

$A \cap B \subseteq B \;\Longrightarrow (A \cap B)^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ بالتالي:

$A \cap B \subseteq A^{\circ} \cap B^{\circ}$

لنبرهن الاحتواء المعاكس :

$\forall x \in A^{\circ} \cap B^{\circ} \Leftrightarrow x \in A^{\circ}$ & $x \in B^{\circ}$

و منه: $\exists \mathrm{T}, \mathrm{G} \in \tau : x \in T \subseteq A$ & $x \in G \subseteq B$

بالتالي: $x \in T \cap G \subseteq A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)^{\circ}$

و بمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة x نجد $A^{\circ} \cap B^{\circ} \subseteq (A \cap B)^{\circ}$

من علاقتي الاحتواء و الاحتواء المعاكس نجد أن المساواة محققة.

5. $(A \cup B)^{\circ} \supseteq A^{\circ} \cup B^{\circ}$ **و برهن بمثال عدم صحة الاحتواء المعاكس.**

$$A \subseteq A \cup B \implies A^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$
$$B \subseteq A \cup B \implies B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$
$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$

الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة كما يبين المثال الاتي:

لنأخذ $X = \{a, b, c\}$ مع التبولوجيا $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ و لتكن:

$$A = \{a\}\ , B = \{c\}\ , A \cup B = \{a, c\}$$

و $A^{\circ} = A\ , B^{\circ} = \emptyset\ , (A \cup B)^{\circ} = \{a, c\}$

$$A^{\circ} \cup B^{\circ} = \{a\} \cup \emptyset = \{a\} \neq \{a, c\} = (A \cup B)^{\circ}$$

أ. نورة العسلي