تعاريف:

لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، و لتكن $x \in X$ نقطة كيفية، عندئذٍ

1. يقال عن x إنها نقطة لاصقة بالمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$V \cap A \neq \emptyset \quad ,\forall V \in V(x)$$

بكلام آخر: x إنها نقطة لاصقة بالمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كانت كل مجاورة للنقطة x تتقاطع مع المجموعة A .

تسمى مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A لصاقة المجموعة A و نرمز لها بأحد الرمزين $\bar{A}\ ,\ cl(A)$.

2. . يقال عن x إنها نقطة تراكم للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$(V\setminus\{x\}) \cap A \neq \emptyset \qquad ,\forall V \in V(x)$$

بكلام آخر: x إنها نقطة تراكم للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كانت كل مجاورة للنقطة x تتقاطع مع المجموعة A بنقطة واحدة على الأقل مغايرة للنقطة x .

تسمى مجموعة جميع نقاط التراكم للمجموعة A مشتقة المجموعة A و نرمز لها $\acute{A}$.

3. يقال عن x إنها نقطة جبهية للمجموعة A في (X,τ) إذا و فقط إذا كان:

$$\begin{cases} V \cap A \neq \emptyset \\ V \cap (X\setminus A) \neq \emptyset \end{cases} ,\forall V \in V(x)$$

تسمى مجموعة جميع النقاط الجبهية للمجموعة A جبهية A و نرمز لها $bd(A)$.

ملاحظات:

1. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، عندئذٍ الاحتواء الآتي محقق دوماً $A \subseteq \bar{A}$

2. من تعريف النقطة اللاصقة و نقطة التراكم لمجموعة نجد أن كل نقطة تراكم لمجموعة هي نقطة لاصقة بها أي أن $\acute{A} \subseteq \bar{A}$ و العكس غير صحيح بصورة عامة كما يوضح المثال الآتي:

لتكن $X = \{a,b,c\}$ و لنعرف عليها $\tau = P(X)$ و لنأخذ $A = \{a\}$ نجد أن $a \notin \acute{A}$ لأن $A \cap X = \{a\}, X \in V(a)$ بينما $a \in \bar{A}$ بوضوح.

3. إذا كانت A, B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي ما بحيث أن $A \subseteq B$ عندئذٍ: $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ و كذلك $\acute{A} \subseteq \acute{B}$.

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) عندئذٍ تكون المساواة الآتية محققة:

$$\bar{A} = A \cup \acute{A}$$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) فإن جبهية المجموعة A تعطى بالعلاقة: $bd(A) = \bar{A} \cap \overline{X\backslash A}$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) فإن لصاقة المجموعة A تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في (X,τ) و التي كل منها تحوي المجموعة A.

نتائج:

1. بما أن لصاقة أي مجموعة في أي فضاء تبولوجي هي تقاطع مجموعات مغلقة في هذا الفضاء فإنها مجموعة مغلقة فيه لأن أي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي.
2. بما أن لصاقة أي مجموعة هي مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي و أن جبهيتها هي تقاطع لصاقتين فإن جبهية أي مجموعة هي مجموعة مغلقة في أي فضاء تبولوجي.
3. بما أن لصاقة أي مجموعة A تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي و التي كل منها تحوي A فإنها أصغر مجموعة مغلقة في هذا الفضاء تحوي A.
4. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، فإن :

A مجموعة مغلقة في $(X,\tau) \Leftrightarrow A = \bar{A}$

تعريف:

إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) و كانت x نقطة كيفية من نقاط المجموعة A ، يقال عن النقطة x إنها نقطة منعزلة في المجموعة A إذا و فقط إذا وجدت V_0 مجاورة للنقطة x بحيث يكون $A \cap V_0 = \{x\}$

ندعو مجموعة جميع النقاط المنعزلة في المجموعة A منعزلة A و نرمز لها $Is(A)$.

ملاحظات:

1. ينتج من التعريف مباشرة أن $Is(A) \subseteq A, \forall A$.
2. من تعريف النقطة المنعزلة في مجموعة و نقطة التراكم لمجموعة نستنتج أن:

$$\acute{A} \cap Is(A) = \emptyset$$

تعريف:

إذا كانت A, B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء تبولوجي (X, τ)، عندئذٍ:

1. يقال عن المجموعة A إنها كثيفة في المجموعة B إذا و فقط إذا كانت لصاقة A تحوي B

A كثيفة في $B \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$

2. يقال عن المجموعة A إنها كثيفة في كل مكان في (X, τ) إذا و فقط إذا كانت كثيفة في أي مجموعة جزئية $C \subseteq X$

A كثيفة في كل مكان في $(X, \tau) \Leftrightarrow C \subseteq \bar{A}, \forall C \subseteq E$

نتيجة:

بوضع $C = X$ نجد أن A كثيفة في كل مكان في $(X, \tau) \Leftrightarrow X \subseteq \bar{A}$

و كون الاحتواء $\bar{A} \subseteq X$ محقق دوماً نستنتج أن:

A كثيفة في كل مكان في $(X, \tau) \Leftrightarrow \bar{A} = X$

ملاحظة:

إذا كانت A كثيفة في كل مكان في $(X, \tau) \Leftrightarrow \bar{A} = X$

و بفرض أن A مجموعة جزئية فعلية $(A \subset X)$ عندئذٍ: $\bar{A} = X \neq A$ و هذا يعني أن A ليست مجموعة مغلقة .

بالتالي تكون A مجموعة مغلقة و كثيفة بآن معاً في حالة وحيدة هي $A = X$.

الفضاءات التبولوجية الجزئية:

تعريف:

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و $Y \subseteq X$ مجموعة جزئية من نقاطه الأسرة $\tau_Y = \{T^*: T^* = T \cap Y; T \in \tau\}$ تعرف تبولوجيا على Y ندعوها التبولوجيا النسبية على Y أو أثر التبولوجيا τ على Y، و ندعو الثنائية (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً.

ملاحظات:

1. إن كلمة تبولوجيا جزئية لا تعني بالضرورة أنها أسرة جزئية من التبولوجيا τ أي أن الاحتواء $\tau_Y \subseteq \tau$ غير محقق بصورة عامة كما تبين الأمثلة الآتية:

a. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ حيث $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ و لتكن $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ تكون $\tau_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ كما نلاحظ إن $\mathbb{N} \notin \tau$.

b. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ و لتكن $Y = [0,1]$ نجد $]-1,1[\cap [0,1] = [0,1[$
من الواضح أن $[0,1[\in \tau_Y$ بينما لا تكون هذه المجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, |.|)$.
و لو أخذنا $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:
$]n-1, n+1[\cap \mathbb{N} = \{n\} \in \tau_{\mathbb{N}}$ و هذا يعني أن $\tau_{\mathbb{N}} = |.|_{\mathbb{N}} = P(\mathbb{N})$ لكن
بوضوح نجد ان: $\{n\} \notin \tau_{|.|}$.

2. إذا كانت τ_Y تبولوجيا نسبية على Y عندئذٍ:

$$\tau_Y \subseteq \tau \iff Y \text{ مجموعة مفتوحة في } (X,\tau)$$

إثبات: $\Leftarrow$: لدينا فرضاً $\tau_Y \subseteq \tau$ و لدينا دوماً $Y \in \tau_Y$ بالتالي $Y \in \tau$
$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض $Y \in \tau$، عندئذٍ $\forall T^* \in \tau_Y$ فإن $T^* = T \cap Y$ حيث $T \in \tau$ ومنه $T^* \in \tau$ لأنها تقاطع لمجموعتين مفتوحتين من τ، و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T^* نجد أن $\tau_Y \subseteq \tau$.

3. إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) عندئذٍ ندعو المجموعة A الجزئية من Y مجموعة مغلقة إذا و فقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في (X, τ) مثل F بحيث يكون $A = F \cap Y$.

طبعاً يبقى تعريف المجموعة المغلقة بأنها متممة المجموعة المفتوحة صحيحاً في الفضاءات التبولوجية الجزئية فإذا كانت $G = T \cap Y : T \in \tau$ مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y, τ_Y) فإن:

$$\begin{aligned} Y\backslash G = Y\backslash(T \cap Y) &= (Y\backslash T) \cup (Y\backslash Y) = (Y\backslash T) \cup \emptyset = Y\backslash T = Y \cap (X\backslash T) \\ &= Y \cap F \quad : F \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

هذا يعني أن $Y\backslash G$ مجموعة مغلقة في الفضاء (Y, τ_Y).

4. كما أن τ_Y ليست بالضرورة أسرة جزئية من τ فإن $\mathcal{F}_Y$ ليست بالضرورة أسرة جزئية من أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء (X, τ)، و يكون لدينا:

$$\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{F} \iff Y \text{ مجموعة مغلقة في } (X,\tau)$$

5. إذا كان (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) و $A \subseteq Y$، عندئذٍ نقول إن V^* مجاورة للمجموعة A في الفضاء (Y, τ_Y) إذا و فقط إذا وجدت مجاورة V للمجموعة A في الفضاء (X, τ) بحيث يكون $V^* = V \cap Y$.

6. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً منه و $A \subseteq Y$، نرمز بالرمز $\bar{A}_Y, A^{\circ}{}_Y, \acute{A}_Y$ لمشتقة و داخلية و لصاقة المجموعة A في الفضاء الجزئي على الترتيب، و يكون لدينا:

a. $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$ و يكون $\bar{A}_Y = \bar{A} \Leftrightarrow Y$ مجموعة مغلقة في (X,τ)

b. $A^{\circ}{}_Y \supseteq A^{\circ} \cap Y$, ، الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة.

c. $\acute{A}_Y = \acute{A} \cap Y$

نورد إثبات العلاقة (b) و نترك العلاقتان $(a)\&(c)$ كتمرين للقارئ.

b. نعلم أن $A^{\circ} \in \tau$ وبالتالي $A^{\circ} \cap Y \in \tau_Y$ من جهة ثانية لدينا $A^{\circ} \subseteq A \subseteq Y$ و منه $A^{\circ} \cap Y \subseteq A \cap Y = A$ أي أن المجموعة $A^{\circ} \cap Y$ مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y,τ_Y) و محتواة في A فهي محتواة في داخلية A في الفضاء الجزئي أي أن: $A^{\circ}{}_Y \supseteq A^{\circ} \cap Y$

الاحتواء المعاكس غير محقق بصورة عامة: في الفضاء الحقيقي العادي $(\mathbb{R},|.|)$ إذا وضعنا $Y = \mathbb{Z}$ و $A = \mathbb{N}$ نلاحظ أن $|.|_{\mathbb{Z}} = P(\mathbb{Z})$ و بالتالي $\mathbb{N}^{\circ}{}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{N}$ بينما في الفضاء$(\mathbb{R},|.|)$ تكون $\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset$ و منه $\mathbb{N}^{\circ}{}_{\mathbb{Z}} \nsubseteq \emptyset = \mathbb{N}^{\circ} \cap \mathbb{Z}$.

انتهت المحاضرة 3