كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1) أثبت أن المنحني المعطى بالدالة المتجهية:
$\vec{r}(t) = (3t^3 + t, 2t, \sin t)$ هو منحني نظامي.

الحل:
$\vec{r}'(t) = (9t^2 + 1, 2, \cos t) \neq (0,0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
ولدينا $\vec{r}(t) \in C^\infty \Leftarrow \vec{r}(t)$ نظامي في جميع النقاط.

2) أثبت أن المنحني المعطى بالعلاقة: $\vec{R}(t) = (t^3, \cos t, 0)$
ليس نظامياً في النقطة $(1,0,0)$.

الحل:
$\vec{R}'(t) = (3t^2, -\sin t, 0)$
عند النقطة $(1,0,0) \Leftarrow \vec{R}'(t) = (0,0,0)$
بالتالي المنحني $\vec{R}(t)$ ليس نظامياً في هذه النقطة.

3) احسب طول قوس المنحني
$$\begin{cases} x = 4a\cos^3 t \\ y = 4a\sin^3 t \end{cases} \quad a > 0$$
حيث t_0, t_1 والمحصور بين النقطتين $t_0, t_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$

الحل:
$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{(-12a\cos^2 t\sin t)^2+(12a\sin^2 t\cos t)^2}$$

$x' = 4a(3\cos^2 t(-\sin t))$ مشتق

$y' = 4a(3\sin^2 t(\cos t))$

$$x'^2+y'^2 = (-12a\cos^2 t\sin t)^2+(12a\sin^2 t\cos t)^2$$

$$= 144a^2\cos^4 t\sin^2 t + 144a^2\sin^4 t\cos^2 t$$

$$= (\sin^2 t\cos^2 t)(144a^2\cos^2 t + 144a^2\sin^2 t)$$

$$= 144a^2(\sin^2 t\cos^2 t)\ (1)$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2} = 12a\sin t\cos t$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} 12a\sin t\cos t\,dt = 12a\int_{t_0}^{t_1}\sin t\cos t\,dt$$

$$= 12a\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\sin 2t\,dt = 6a\int_{t_0}^{t_1}\sin 2t\,dt$$

$$= -3a\left[\cos 2t\right]_{t_0}^{t_1} = 3a(\cos 2t_0 - \cos 2t_1)$$

4 أوجد بتجه واحدة المماس للمنحني المعرف بالمعادلات :

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{cht}\cos t \\ y = a\,\mathrm{cht}\sin t \\ z = at \end{cases}$$ حيث $a>0$

في النقطة الموافقة للقيمة $t=0$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل

متجه واحدة المماس:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$\vec{r}(t) = (a\ cht\ Cost\ ,\ a\ cht\ Sint\ ,\ at)$$

$$\vec{r}'(t) = (a).(\ Sht\ Cost - cht\ Sint\ ,\ Sht\ Sint + cht\ Cost\ ,\ 1)$$

$$\vec{r}'(t) = (x'\ ,\ y'\ ,\ z')$$

$$x'^2 = a^2\ (Sht\ Cost - cht\ Sint)^2$$

$$= a^2\ (\ Sh^2t\ Cos^2t + ch^2t\ Sin^2t - 2\ Sht\ Cost\ cht\ Sint\ )$$

$$y'^2 = a^2\ (Sht\ Sint + cht\ Cost)^2$$

$$= a^2\ (\ Sh^2t\ Sin^2t + ch^2t\ Cos^2t + 2\ Sht\ Sint\ cht\ Cost\ )$$

$$z'^2 = a^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2\ (\ Sh^2t\ Cos^2t + ch^2t\ Sin^2t + Sh^2t\ Sin^2t + ch^2t\ Cos^2t + 1\ )$$

$$= a^2\ (\ 2\ ch^2t - 1 + 1\ ) = a^2\ 2\ ch^2t$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = a\sqrt{2}\ cht$$

متجه واحدة المماس في النقطة الموافقة للقيمة $t = 0$ هو:

$$\vec{T} = \left(0\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة