كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : الهندسة التفاضلية

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مفردات المقرر:

نظرية المنحنيات ـ نظرية السطوح ـ التحليل التنسوري ـ المنطويات التفاضلية

المراجع العلمية:

الهندسة التفاضلية / د. طالب غريبة

د. عصام ديبان د. محسن شيخة من منشورات جامعة حمص

الهندسة التفاضلية / د. سعيد أبو عقل

د. محمد الشيخ من منشورات جامعة دمشق

نظرية المنحنيات

المنحني: هو المحل الهندسي لمسار نقطة متحركة في الفضاء وبحالة خاصة في المستوي.

المنحني الأولي: مجموعة نقاط الفضاء ℓ منحني أولي إذا كانت هذه المجموعة صورة لمجال مفتوح وفق تطبيق طبولوجي من هذا المجال إلى الفضاء.

ملاحظة:

تعريف التطبيق الطبولوجي: هو تطبيق مستمر هو ومعكوسه.

تعريف التطبيق المستمر: نقول عن التطبيق أنه مستمر إذا نقل بشكل ما إلى F' بحيث تبقى النقاط القريبة من بعضها من F قريبة من بعضها في F'.

التمثيل الوسيطي لمنحني :

المنحني l هو صورة لمجال مفتوح وفق تطبيق طبولوجي : ليكن r هو التطبيق

بحيث : $r :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

نسمي جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad ; \quad t \in]\alpha, \beta[$$

التمثيل الوسيطي للمنحني l المعين بالتطبيق r.

معادلة المنحني في جملة الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهات الوحدة على المحاور الاحداثية

مثال : لتكن $r_0(1, 2, 3)$ ، $\vec{u}(-2, 3, 1)$ متجه من الفضاء

المنحني الوسيطي المعطى :

$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow \vec{r}(t) = r_0 + t\,\vec{u}$

حيث $r_0(x_0, y_0, z_0)$ ، $\vec{u}(a, b, c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

بالتعويض :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

هذا المنحني هو مستقيم يمر بالنقطة r_0 وموجه الشعاع $\vec{u}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* إن المنحني الوسيطي التالي:

$r: R \longrightarrow R^3$

$t \longrightarrow \vec{r}(t) = r_0 + t^3 \vec{u}$

نحصل على المستقيم السابق نفسه لأن t أو t^3 وسيط من R.

ملاحظات: ① قد يكون لمنحني ما أكثر من تمثيل وسيطي.

② ليس من الضروري أن يكون t من مجال مفتوح $]\alpha, \beta[$ يمكن أن يكون مغلق أو نصف مفتوح أو حتى المحور الحقيقي R بأكمله.

③ إذا كان $z(t) = 0$ المنحني مستوي.

عندئذ المعادلات الوسيطية لمنحني t هو:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; t \in]\alpha, \beta[$$

مثال: المنحني المعين بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = a\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = at\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} ; t \in R$$

نسمي منحني الأستيروئيد.

المنحني المعرف بتقاطع سطحين:

ليكن φ_1 و φ_2 سطحين معرفين بالعلاقة:

$\varphi_1: F_1(x, y, z) = 0$

$\varphi_2: F_2(x, y, z) = 0$

بالحل المشترك للجملة نحصل على التمثيل الوسيطي للمنحني بشرط أن يتحقق:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذ نفرض $x=t$ الوسيط ونوجد y و z بدلالة هذا الوسيط:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \psi(t) \\ z = \mu(t) \end{cases}$$

مثال: منحني فيفيان الناتج عن تقاطع كرة نصف قطرها R مع أسطوانة قطر قاعدتها R.

$$\begin{cases} F_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ F_2 : x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$$

أوجد التمثيل الوسيطي للمنحني:

الحل: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$ ، $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z$ ، $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y$ ، $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = 4yz \neq 0$$

نفرض $x = t$

$$(*) \quad t^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$t^2 + y^2 - Rt = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{Rt - t^2}$$

نعوض y في $(*)$

$$t^2 + Rt - t^2 + z^2 = R^2 \Longrightarrow z^2 = R^2 - Rt \Longrightarrow z = \sqrt{R^2 - Rt}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{Rt - t^2} \\ z = \sqrt{R^2 - Rt} \end{cases} ; \quad t \in]-\infty, +\infty[$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متجه المماس لمنحني $\vec{r}'(t)$

ليكن $\ell = r(t)$ حيث $t \in [\alpha, \beta]$ منحني ما. نقول أن الدالة المتجهية $\vec{r}(t)$ تملك مشتقاً في النقطة الموافقة للوسيط $t \in [\alpha, \beta]$

إذا كانت النهاية: موجودة و محدودة $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$

عندئذ نرمز لهذه النهاية $r'(t)$ ويكون المتجه هو متجه المماس للمنحني ℓ في النقطة $M = r(t)$

ملاحظة المتجه $r(t)$ بدلالة مركباته بالشكل:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$$

تكون الدوال $x'(t)$ ، $y'(t)$ ، $z'(t)$ مركبات متجه المماس في النقطة M من ℓ طويلته:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

نسمي $\vec{T}$ متجه وحدة المماس

وقيمته: $$|\vec{T}| = \frac{|\vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} = 1$$

المستقيم المماس لمنحني

هو المستقيم المار من نقطة $M = r_0(t)$ و الذي منحاه للمنحني في تلك النقطة هو $r'(t_0)$

$$\vec{r}(t) = r_0 + t\,\vec{u} \quad ; \quad \vec{u} = \vec{r}'(t_0)$$

$$\vec{r}(t) = r_0 + t\,\vec{r}'(t_0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,x' \\ y = y_0 + t\,y' \\ z = z_0 + t\,z' \end{cases} \quad ; \; t \in R$$

العبارة التحليلية :

$$\frac{x - x_0}{x'} = \frac{y - y_0}{y'} = \frac{z - z_0}{z'}$$

المنحني النظامي و المنحني الأملس

ليكن ℓ منحنياً معرفاً بالدالة المتجهة $r = r(t) \; ; \; t \in]\alpha, \beta[$

فإذا كان $r \in C^n$ أي أنه قابل للاشتقاق حتى المرتبة n

و $r'(t) \neq 0$ نسمي المنحني ℓ منحني نظامي

يكون المنحني ℓ منحنياً أملساً

إذا كان $r \in C^1$ و $r'(t) \neq 0$ لكل $t \in [\alpha, \beta]$

مثال تعطى معادلة اللولب الدائري :

$\vec{r}(t) = (a\,Cost\,,\; a\,Sint\,,\; bt) \;,\; a > 0 \;,\; b > 0$

① هل هذا المنحني أملساً نظامياً ؟

② أوجد معادلة المماس في النقطة الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{3}$.

الحل

① بما أن $r(t) \in C^\infty$ فالمنحني نظامي

$\vec{r}'(t) = (-a\,Sint\,,\; a\,Cost\,,\; b) \neq (0,0,0)$

لا ينعدم من أجل أي قيمة لـ t

و بالتالي المنحني أملس .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\ ,\ \frac{a}{2}\ ,\ b\right)$ ②

$r\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\ ,\ b\frac{\pi}{3}\right)$

المثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}at \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{a}{2}t \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = b\frac{\pi}{3} + bt \end{cases}$$

العبارة التحليلية:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{z - b\frac{\pi}{3}}{b}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة