كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : احصاء رياضي

المحاضرة :الثانية /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* التوزيعات الاحتمالية

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- توزيع برنولي:

سنعني احتمال نجاح تجربة بـ p وهو يمثل وسيط برنولي

وسنعني فشل التجربة $q = 1 - p$

فإذا اعتبرنا لـ X عدد مرات نجاح تجربة برنولي وسيطها p ولتكن

مجموعة قيم X هي $p_X = (0,1)$ ويكون احتمال النجاح

$p = p(X=1)$

احتمال الفشل $q = p(X=0)$

اي أن لـ X التوزيع الاحتمالي

X	0	1
$P(X=x)=f(x)$	q	p

تعريف: نقول إن للمتغير X توزيعاً برنولياً بالوسيط p إذا كان

لكل X دالة احتمالية

$f(x) = p^x q^{1-x}$ و $x = 0,1$, $q = 1-p$, $0<p<1$

ان التوقع الرياضي لتوزيع برنولي

$E(x) = \sum x f(x) = \sum_{x=0}^{1} x p^x q^{1-x} = 0 + p = p$

$\{E(x) = p\}$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

والمتباينة لتوزيع برنولي

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V(x) = pq$$

والانحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{pq}$

2- توزيع ثنائي الحد:

هو تجربة برنولي لـ n مرة تابع التوزيع له يعطى بالشكل

$$P(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث p وسيط برنولي.

$$q = 1 - p \quad , \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

أما جدول تابع التوزيع يعطى بالشكل:

X	0	1	...	K	...	n
P(X=x)	q^n	npq^{n-1}		$\binom{n}{x} p^K q^{K-n}$		p^n

التوقع الرياضي: $E(x) = \mu = pq$

المتباينة الرياضية: $V(x) = \sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{npq}$

$p(x) \geq 0$ و $\sum p(x) = 1$ علمنا (n, p) وسطاء التوزيع

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: إذا كان أحتمال أن يصيب راعي الصيف هو 0.8 لـ 5 مرات تصويب والمطلوب:

1- أوجد دالة التوزيع الأحتمالي.

2- احتمال أصابة الصيف مرة واحدة.

3- احتمال أصابة الصيف مرة واحدة على الأكثر

4- احتمال أصابة الصيف مرتين على الأقل.

5- احتمال أصابة الصيف.

6- أوجد التوقع الرياضي وتباينة.

الحل: 1-

$$P(X=x) = \binom{5}{x} p^x q^{5-x}$$

2-

$$P(X=1) = \binom{5}{1} p^1 . q^n$$

$$= 0.00642$$

3-

$$P(X \leq 1) = P(x=0) + P(x=1)$$

$$= q^5 + 0.0064$$

$$= (0.2)^5 + 0.0064$$

$$= 0.00672$$

4-

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - P(x=0) + P(x=1)$$

$$= 1 - 0.00672$$

$$= 0.99328$$

5-

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1)$$

$$= 1 - P(x=0)$$

$$= 1 - (0.2)^5$$

$$= 0.99968$$

6- $E(x) = np$

$= 5 \times 0.8 = 4$

$V(x) = npq \quad , \quad = Exq \quad , \quad V(x) = 4 \times 0.2 = 0.8$

3- توزيع بواسون : إذا كانت العينة كبيرة و n أحتمال صغير حيث

λ هو وسيط بواسون

يعطى دالة التوزيع بواسون على الشكل

$$p(n) = p(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

لينا توزيع بواسون

X	0	1	2	x
$p(X=2)$	e^{-1}	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

وسطاء التوزيع $X = (p, n)$

التوقع هو : $E(x) = \lambda = np$ وهو نفسه التباين $V(x) = np$

مثال : بفرض أن نسبة الحصول على المرتبة الأولى في السنة الرابعة برامجيات هو 0.0003 نأخذ عينة مؤلفة من 12000 طالب والمطلوب :

1- ما أحتمال أن يكون بينهم 3 طالب حصلو على المرتبة الأولى ثم أوجد أحتمال أن يحصل على المرتبة الأولى واحد على الأقل

$$p(X=3) = \frac{e^{-0.36} \times 0.36}{3!} = 0.005$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= 1 - p(x=0)$

$= 1 - e^{-0.36}$

$\Rightarrow = 0.302$ باستخدام الآلة الحاسبة

بعض الأمثلة حول توزيع

- عدد العشوائي للمكالمات الهاتفية للشركة خلال ربع ساعة.
- عدد عشوائي لحوادث المرور خلال موعد الأطفال في شهر رمضان في بلد معلم.

التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1- التوزيع الأسي: التوزيع الأسي أهمية كبيرة في المجال التطبيقي ويعد نموذج مثالي للكثير من المسائل التي تواجه حياتنا اليومية خصوصاً الزمن كمثال

1- الزمن العشوائي لمكالمة هاتفية

2- الزمن اللازم لصيانة جهاز في ورشة صيانة

3- الزمن اللازم لصيانة وكشفة أو مقاومة

يعبر عن المتغير بـ λ.

* دالة الكثافة هي من الشكل:

$$F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أما دالة الأحتمالية (دالة التوزيع)

$$P(X<x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

توقع رياضي: $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

تباين: $V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

مثال: إذا كان عمر صمام كهربائي $\lambda = 0.0001$

1- أوجد دالة التوزيع الأحتمالي وأوجد دالة الكثافة

2- العمر الوسطي للصمام وتباينه

3- احتمال أن يعمر الصمام على الأقل 8000 سنة

الحل:

1- $f(x) = \begin{cases} 0.0001\, e^{-0.0001x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$

دالة التوزيع:

$$P(X<x) = \begin{cases} 1-e^{-0.0001x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2 - العمر الوسطي:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{0.0001} = 10.000 \text{ Hr}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 100.000.000 \text{ Hr}$$

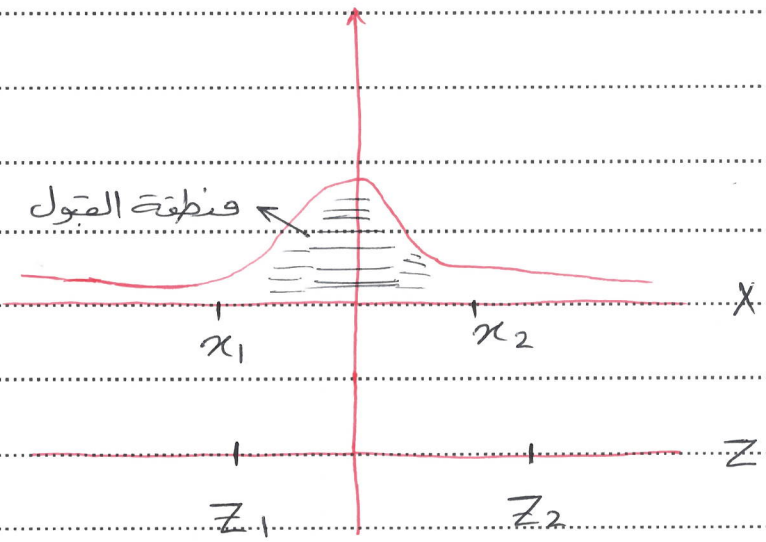
3- $P(X \geq 8000) = 1 - P(X < 8000)$

$$= 1 - (1 - e^{-0.0001 \times 8000}) = 0.448$$

2 - التوزيع الطبيعي:

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة في تطبيقات عديدة في مجال الأعمال حيث يستخدم في كثير من المتغيرات العشوائية (أطوال - أوزان - درجات ... الخ)

- منحنى الكثافة له شكل الجرس المقلوب وإن معظم القياسات تتركز حول القيمة الوسطى.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$N(\mu, \sigma^2)$ وسطاء

توقع $E(X) = \mu$

$V(X) = \sigma^2$

دالة الكثافة :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

في $-\infty < x < \infty$

دالة التوزيع الاحتمالية :

$$P(X < x) = \Phi(z)$$

$$P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نظراً لصعوبة إيجاد قيم الاحتمالات عن طريق التكامل وصعوبة جداول أحصائية تساعدنا في الحصول على هذه القيم وجد جدول الطبيعي.

- اما التوزيع الطبيعي المعياري :

$$Z \sim N(0,1)$$

دالة الكثافة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

دالة التوزيع الاحتمالية

$$P(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \lambda x$$

لحساب قيمة هذا الاحتمال سنستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: إذا كان X توزع طبيعي فإن المتغير العشوائي Z يأخذ الشكل:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

الحل: التوزع الطبيعي معياري المعنى

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \quad N(0,1)$$

يساعد هذا الاحتمال إذا كانت Z معطاة بالعرض بأخذ العدد الصحيح والعدد بعد الفاصلة من عمود هذا الجدول أما العدد الثاني بعد الفاصلة من سطر هذا الجدول ويجري التقاطع فنحصل على قيمة Z

* **خواص التوزع الطبيعي:**

1. $p(Z < -3) = 1 - p(Z < 3)$
2. $p(Z > 3) = 1 - p(Z < 3)$
3. $p(Z > -3) = p(Z < 3)$
4. $p(3_1 < Z < 3_2) = p(Z < 3_2) - p(Z < 3_1)$

أمثلة:

1. $p(Z < 2.56)$
2. $p(Z > 1.84)$
3. $p(Z < -1.1.26)$
4. $p(1 < Z < 1.33)$

الحل: 1)

$$p(Z < 2.56)$$
$$= 0.4948 + 0.5$$
$$= 0.9948$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) $1 - p(Z < 1.84)$

$1 - (0.4671 + 0.5) = 1 - 0.967 = 0.0033$

3) $p(Z < -1.36) = 1 - p(Z < 1.36)$

$= 1 - 0.413 = 1 - 0.913 = 0.0869$

4) $p(Z < 1.33) - p(Z < 1)$

$= 0.4002000 - (0.3413 + 0.05)$

$= 0.90002 - 0.8413 = 0.0669$

وظيفة 1 ـ إذا كان X متغير عشوائي له توزيع

$X \sim N(50, 100)$

$p(42 < x < 55)$ أوجد قيمة

ثم عين مساحة على منحنى غاوسين

2 ـ إذا كان X متغير عشوائي له توزيع:

$X \sim N(0, 16)$

أوجد لأقصى

$p(X(x) = 0.9980)$

وحل هذا على المنحنى

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z