كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية القياس

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

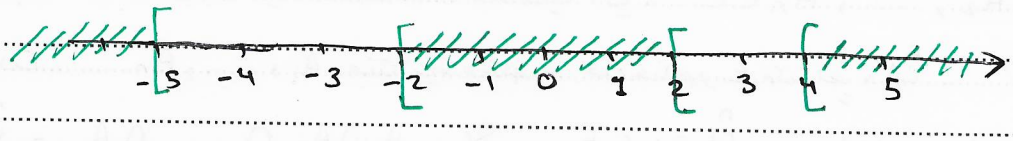
2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

■ مثال عن الحلقات: أي صف جزئيات من الشكل $[a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ في $\mathbb{R}$ لا يشكل حلقة في الحالة العامة في $\mathbb{R}$ لأن اجتماع أي مجاليين من هذا الصف أو قسمها ليس من الضروري أن يكون مجال من نفس الصف.

على سبيل المثال: إذا أخذنا من هذا الصف المجالين $[2,4]$ و $[-5,-2]$ فإن اجتماعهما $[-5,-2] \cup [2,4]$ ليس مجال من الشكل $[a,b]$ أي ليس عنصر من هذا الصف كذلك $[2,4]$ و $[-5,-2]$ ليس مجال من الشكل $[a,b]$ أي ليس عنصر من هذا الصف.

طالما $[-5,-2] \cap [2,4] = \emptyset$ ليست عنصر من هذا الصف.



■ إن الحلقة غير مغلقة بالنسبة لعملية التقيم (نعرفها مقبلاً مجموعة) بشكل عام والسؤال المطروح سابقاً من محاضرة سابقة متى تكون حلقة D في مجموعة ما غير خالية X مغلقة بالنسبة لعملية التقيم.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي متى تكون حلقة D في مجموعة ما غير خالية X مغلقة بالنسبة لعملية التقيم هو أن يكون $X \in D$ (أي المجموعة الكلية X عنصراً من الحلقة D).

الجبر: تعريف الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية نوع الصف غير الخالي E من أجزاء X جبراً في X إذا حققت الشروط التالية:

1- $\emptyset, X \in E$

2- $\forall A, B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$

3- $\forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

أي من التعريف السابق يعني أن E جبراً في X إذا وفقط إذا كان X و $\emptyset$ عنصران من الصف E و E مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي وعملية المتمم (الإتمام).

بعض النتائج: من التعريف السابق ينتج أنّه إذا كان E جبراً في X فإنّ E مغلقة

أولاً: بالنسبة لعملية التقاطع أي: $\forall A,B \in E \Rightarrow A\cap B \in E$

حيث A و B من E لأنّه لدينا $A\cap B = \bar{\bar{A}\cap\bar{B}} = (\bar{A}\cup\bar{B}) \in E$

حسب دومورغان

و E جبر في X بالتالي $\bar{A}$ و $\bar{B}$ عنصران من E

بالتالي $\bar{A}\cup\bar{B} \in E$

ثانياً: مغلقة بالنسبة لعملية الفرق (الفرق النسبي) $\forall A,B \in E \Rightarrow A-B \in E$

لدينا $A-B = A\cap\bar{B} \in E$

لأنّ $A \in E$ و $B \in E$ و E جبر في X بالتالي $\bar{B} \in E$ إذاً $A\cap\bar{B} \in E$

إذاً $A-B \in E$

ثالثاً: بالنسبة للاجتماعات والتقاطعات المنتهية أي: $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in E$

أي إذا كانت $A_1, \dots, A_n$ متتالية منتهية من عناصر E عندئذٍ فإنّ:

$A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in E$ و $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in E$

نتيجة: بما أنّ كل جبر في X مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي والفرق بالتالي كل جبر في X هو حلقة فيها. ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً في الحالة العامة

ماهو العكس؟ أي هل كل حلقة D في X حيث X مجموعة ما غير منتهية جبراً في X في الحالة العامة؟

ليس صحيحاً في الحالة العامة لأنّه على سبيل المثال فإنّ صفّ المجموعات المنتهية في المجموعة $X=\mathbb{R}$ يشكل حلقة (من مثال في محاضرة سابقة) ولكن هذه الحلقة لا تشكل جبراً في $\mathbb{R}$ لأنّ ϕ مجموعة منتهية (عدد عناصرها $=0$) من $\mathbb{R}$ إذاً فهي عنصر من هذا الصفّ أي الحلقة

ولكن $\mathbb{R}=\bar{\phi}$ ليست عنصراً من هذا الصفّ (الحلقة) لأنّ $\mathbb{R}$ مجموعة غير منتهية

وبالتالي الحلقة غير مغلقة بالنسبة لعملية التتميم. إذاً هذه الحلقة ليست جبراً

ملاحظة: إنّ المجموعة ϕ هي مجموعة منتهية في $\mathbb{R}$ ومجموعة منتهية بشكل عام

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لأنّ: عدد عناصرها = ∞ وكذلك فإنّ ∅ مجموعة محدودة في R ومحدودة بشكل عام ولا نستطيع أنّ المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أيّ مجموعة ما X

السؤال المطروح حسب المناقشة السّابقة؟

متى نضمن كل حلقة في مجموعة ما غير خالية X جبراً فيها؟

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي حتّى تكون حلقة D في مجموعة ما غير خالية X جبراً فيها أن تكون $X \in D$ (أي المجموعة الكلية X عنصراً من الحلقة D) غير مطلوب برهانها

أمثلة عن الجبر:

مثال (1): إذا كانت X مجموعة ما غير خالية فإنّ الضمنان $\{\emptyset, X\}$ و $p(X)$ هما جبران في X (لماذا؟) حيث الضمن الأول $\{\emptyset, X\}$ هو أصغر جبر في X والضمن الثاني $p(X)$ هو أكبر جبر في X

الجبر التام: تعريفه: لتكن X مجموعة ما غير خالية نسمّي الضمن غير الخالي F من أجزاء X جبراً تاماً (سـ ـ جبر) في X إذا حقّقت الشروط التّالية:

1. $X, \emptyset \in F$
2. من أجل أي متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر الضمن F فإنّ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in F$
3. مغلق بالنسبة للمتمة: $\forall A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$

إنّ التعريف السّابق يعني أنّ الضمن F من أجزاء المجموعة X يكون جبراً تاماً (سـ ـ جبر) في X إذا وفقط إذا كان X و $\emptyset$ عنصران من F و F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع العدود والمتمّة.

بعض النتائج: ينتج من التعريف السابق أنّه إذا كان F جبراً تاماً في X فإنّ F يكون مغلقاً أولاً: بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي أي إذا كانت $(A_i)_{i=1}^{n} = A_1, A_2, \dots, A_n$ متتالية منتهية من عناصر الجبر F فإنّ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

(لأنّ الجبر التّام مغلق بالنسبة للاجتماع العدود ومن ضمنها الاجتماع المنتهي)

ملاحظة هامة جداً: يمكن كتابة $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ بالشكل $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ حيث:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \phi \cup \phi \cup \dots$

ثانياً: بالنسبة للتقاطع العدود أي إذا كانت $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية $\in F$ فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \in F$

لأنه: $(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n \cup \dots) = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i = \bar{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$ لدينا

$= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i\right) \in F$

وأيضاً كنتيجة فإن الجبر التام F مغلق بالنسبة للتقاطع المنته

نتيجة هامة: كل جبر تام في مجموعة ما غير خالية هو جبر فيها لماذا؟ ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً أي ليس كل جبر في X و X مجموعة ما غير خالية هو جبراً تاماً فيها في الحالة العامة

مثال: (خاص بالعلمي) برهن أنه إذا كانت $X = \mathbb{R}$ وكانت A مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{R}$ أي جميعها $\bar{A}$ في $\mathbb{R}$ منتهية عندئذٍ فإن صف الجوارات غير الخالية D من $\mathbb{R}$ أي: $R = \{A \subseteq \mathbb{R} ; A$ مجموعة منتهية أي $\bar{A}$ مجموعة منتهية$\}$ جبر أ في $\mathbb{R}$ ولكنه ليس جبراً تاماً.

إن المثال السابق يعد مثال عن أنه ليس من الضروري أن يكون كل جبر في X هو جبر تام فيها.

نتيجة: ليس كل حلقة في X هي جبر تام في X في الحالة العامة

على سبيل المثال: صف المجموعات المنتهية أو المحدودة في $\mathbb{R}$ يشكل حلقة في $\mathbb{R}$ ولكنه ليس جبراً ولا جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ لأن: $(\phi \in$ الصف المذكور$)$ ولكن $(\phi = \mathbb{R} \notin$ هذا الصف$)$

مثال عن الجبر التام: إن المجموعتان $\{\phi, X\}$ و $p(X)$ هما جبران تامان في X

الأول: هو أصغر جبر تام الثاني: أكبر جبر تام في X

مثال هام: إن صف المجالات المفتوحة من الشكل $]a,b[$ في $\mathbb{R}$ أو صف المجالات من الشكل $[a,b[$ في $\mathbb{R}$ أو صف المجالات من الشكل $]a,b]$ في $\mathbb{R}$ لا تشكل حلقة ولا جبراً ولا جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ في الحالة العامة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

■ تعريف الفضاء المتوسي (القابل للقياس):

إذا كانت X مجموعة ما غير خالية و F جبراً تاماً فيها عندئذٍ ندعو الثنائية (X, F) فضاءً متوسياً أو قابل للقياس وندعو كل مجموعة A من F أي $A \in F$ مجموعة متوسة بالنسبة للجبر التام F واختصاراً A مجموعة متوسة أي أنّ جميع عناصر الجبر التّام F مجموعات متوسة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة