كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة :ميكانيك ٢

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جداءات العطالة:

تعريف: في جملة احداثيات ديكارتية متعامدة ومباشرة ونظامية $Oxyz$، لتكن M نقطة مادية كتلتها m ولتكن R و Q أي مستويين موازيين لمستويين احداثيين في هذه الجملة لترمز البعد الجبري للنقطة M عن المستويين R و Q بـ r_1 و r_2 عندئذٍ نعرف جداء عطالة النقطة بالنسبة للمستويين R و Q بـ: $P_{RQ}(M) = m r_1 r_2$

- أما إذا كانت $S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ مجموعة من النقاط المادية فإننا نعرف:

$$P_{RQ} = \sum_{i=1}^{n} P_{RQ}(M_i)$$

- أما بالنسبة للأجسام المستمرة تؤول المجاميع السابقة إلى تكاملات أحادية أو ثنائية أو ثلاثية وذلك بحسب كون الجسم المستمر خطياً (سلكاً) أو سطحاً أو حجماً

$$P_{RQ} = \int_{(D)} P_{RQ}\, dm$$

حيث dm كتلة عنصرية مأخوذة بشكل اختياري في الجسم D.

حالات خاصة: في جملة احداثيات ديكارتية متعامدة نظامية ومباشرة $Oxyz$ ولتكن الترميز سنرمز لجداء العطالة $P_{Oxy, Oxz}$ بالنسبة للمستويين الاحداثيين Oxy و Oxz بالرمز P_{yz} (هدفنا الوسيط المشترك بين هذين المستويين المتعامدين)

وبنفس الأسلوب نرمز بـ P_{xz} بالنسبة للمستويين Oxy و Oyz

وبالرمز P_{xy} جداءات العطالة بالنسبة للمستويين Oyz و Oxz.

- إذا كانت $S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ مجموعة من النقاط المادية حيث $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ... $M_n(x_n, y_n, z_n)$ فإن جداءات عطالتها بالنسبة للمستويات الاحداثية هي:

$$\begin{cases} P_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \\ P_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\ P_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \end{cases}$$

حيث m_i كتلة النقاط M_i $(i = 1, \dots, n)$.

- في حالة الأجسام المستمرة تؤول هذه المجاميع إلى تكاملات أحادية أو ثنائية أو ثلاثية حسب كون الجسم سلك أو سطح أو حجم.

ملاحظات:

- إن جداء العطالة هو كمية جبرية قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً (خلافاً لقوى العطالة الموجبة أو صفراً)
- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لأحد المستويات الاحداثية فإن بعض جداءات العطالة تنعدم:

مثلاً: - إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لـ Oxy فإن: $P_{xz} = P_{yz} = 0$

- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لـ Oyz فإن: $P_{xy} = P_{xz} = 0$
- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لـ Oxz فإن $P_{xy} = P_{yz} = 0$

(لحالة الجسم متناظر بالنسبة لـ Oxy)

$$P_{yz} = \sum m_{yz} = \sum m_i y_i z_i + \sum m_i y_i (-z_i) + \sum m_i y_i (0)$$

$$= \sum_{i=1} m_i y_i z_i - \sum_{i} m_i y_i z_i + 0 = 0$$

(وبنفس الطريقة بالنسبة لـ Oyz و Oxz مستويا تناظر)

• إذا كان الجسم متناظر بالنسبة لأحد المحاور الاحداثية فإن جداءات العطالة بالنسبة لأي مستويين احداثيين يحوي كل منهما هذا المحور تكون معدومة. فمثلاً:

- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة للمحور ox فإن $P_{xy}=0$ ، $P_{xz}=0$

$$\left(P_{xy}=\sum m_i x_i y_i=\sum_i m_i x_i y_i+\sum_i m_i x_i(-y_i)+\sum_i m_i x_i(0)=\sum m_i x_i y_i-\sum m_i x_i y_i=0\right)$$

- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة للمحور oy فإن $P_{yx}=P_{yz}=0$

- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة للمحور oz فإن $P_{zx}=P_{yz}=0$

• إذا كانت جميع نقاط الجسم تقع في مستو واحد من المستويات الاحداثية

ولكن oxy فإن $z_i=0$ $\Leftarrow$ $P_{zx}=P_{zy}=0$

- إذا كانت النقاط تقع في المستوي oyz فإن $P_{yx}=P_{zx}=0$ $\quad x=0$

- إذا كانت النقاط تقع في المستوي oxz فإن $P_{yx}=P_{zy}=0$ $\quad y=0$

نظرية هويغنز الثانية: في جملة احداثية ديكارتية متعامدة ومباشرة ونظامية oxyz إن جداء عطالة مجموعة مادية (جسم مادي) D بالنسبة لأي مستويين احداثيين يساوي إلى جداء عطالة المجموعة (الجسم) بالنسبة لمستويين مارة بمركز الثقل وموازيين للمستويين الاحداثيين مضافاً إليه جداء عطالة مركز الثقل بالنسبة للمستويين باعتبارها نقطة كتلتها كتلة المجموعة (الجسم) الكلي أي M

مركز ثقل

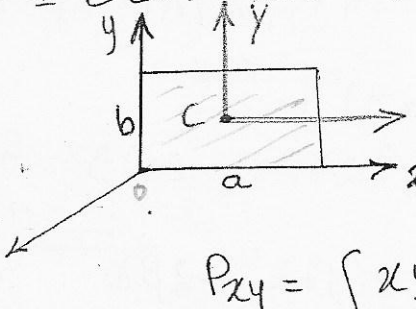
M الكتلة الكلية للجسم

$$P_{xy}=P_{\bar{x}\bar{y}}+M x_c y_c$$
$$P_{yz}=P_{\bar{y}\bar{z}}+M y_c z_c$$
$$P_{zx}=P_{\bar{z}\bar{x}}+M z_c x_c$$

حيث P_{xy} ، P_{yz} ، P_{zx} هي جداءات العطالة بالنسبة لمستويات مارة بمركز الثقل C وتوازي المستويات الاحداثية oxy ، yoz ، zox على الترتيب. M كتلة المجموعة الكلي (الجسم الكلي) (x_c, y_c, z_c) احداثيات مركز الثقل C.

مثال:

أوجد جداءات العطالة لصفيحة مستطيلة متجانسة وذلك بالنسبة لمحورين منطبقين على ضلعي الصفيحة



الحل:

لتكن a طول الصفيحة المنطبق على ox ، b عرض الصفيحة المنطبق على oy فتكون oz عمودي على مستوي الصفيحة

$$P_{xy}=\int xy\,dm \quad ; \quad \boxed{dm=\rho dx dy}$$

$$P_{xy}=\rho\int_0^a x\,dx\int_0^b y\,dy=\rho\frac{a^2b^2}{4}=\frac{Mab}{4} \quad ; \quad \boxed{M=\rho ab}$$

الصفيحة موجودة في المستوي oxy أي كثافتها السطحية ثابتة على z.

$$\begin{cases} P_{yz}=\int yz\,dm=0 \quad ; \quad z=0 \\ P_{zx}=\int zx\,dm=0 \quad ; \quad z=0 \end{cases}$$

ملاحظة:

تحاك بالاستعانة ايجاد جداءات العطالة، وذلك بالاستعادة على هويغنز الثاني:
وذلك بأخذ محاور احداثيات XYZ توازي مركز ثقل الصفيحة C التي احداثياته:

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$$

$$P_{xy} = P_{Xy} + M x_c y_c$$

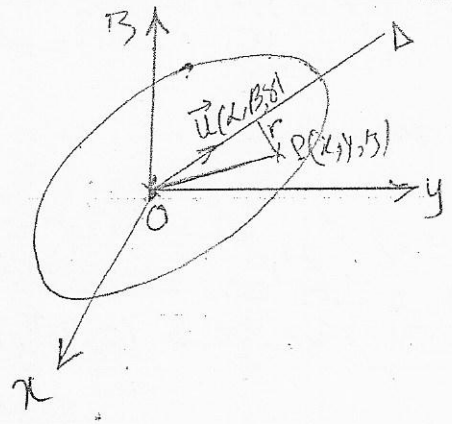
لدينا oy محور تناظر $\Leftarrow P_{Xy} = 0 \Leftarrow$ للصفيحة

$$P_{xy} = M x_c y_c = M \frac{a}{2} \frac{b}{2} = \frac{Mab}{4}$$

وكذلك:

$$\begin{cases} P_{yz} = M \frac{b}{2} \cdot 0 = 0 \\ P_{zx} = M \frac{a}{2} \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad z=0 \text{ أي}$$

جداء عطالة مجموعة نقاط مادية بالنسبة لمحور مار من مبدأ الاحداثيات:



ليكن لدينا المحور Δ المار من مبدأ الاحداثيات ومتجه واحدته هو $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ حيث $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$
وليكن $P(x,y,z)$ نقطة من المجموعة المادية كتلتها m.

فيكون بعد P عن Δ:

$$r^2 = \|\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\|^2$$

$$r = \frac{|\overrightarrow{OP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$ ← جداء خارجي

من تعريف عزم العطالة:

$$I_\Delta = \sum r^2 m = \sum m \|\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\|^2 = \sum m \left[(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) \wedge (\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k})\right]^2$$

$\overrightarrow{OP} \times \vec{u}$ ⇒ $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$ طويلة

$$= \sum m \left[(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2\right]$$

$$= \sum m \left[\gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 + \alpha^2 z^2 + \gamma^2 x^2 + \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\gamma\beta yz - 2\alpha\gamma zx - 2\beta\alpha xy\right]$$

بالترتيب:

$$= \alpha^2 \sum m(y^2+z^2) + \beta^2 \sum m(z^2+x^2) + \gamma^2 \sum m(y^2+x^2) - 2\beta\gamma \sum myz - 2\alpha\gamma \sum mzx - 2\beta\alpha \sum mxy$$

ولكن لدينا:

$\sum m(y^2+z^2) = I_x$ ، $\sum m(z^2+x^2) = I_y$ ، $\sum m(x^2+y^2) = I_z$ ← عزم العطالة بالنسبة للمحور ox (أو oy أو oz) على التوالي

$\sum myz = P_{yz}$ ، $\sum mzx = P_{zx}$ ، $\sum mxy = P_{xy}$ ← من الصفيحة نفسها

نعوض في العزم I_Δ:

حفظ علاقة هيغنز ستاينر

$$I_\Delta = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\beta\gamma P_{yz} - 2\gamma\alpha P_{zx} - 2\alpha\beta P_{xy}$$

أي أن عزم عطالة مجموعة يتعين بدلالة عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الاحداثية و بدلالة جداءات العطالة بالنسبة للمستويات الاحداثية .

يمكن كتابة عزم العطالة بالنسبة لـ Δ :

حفظ

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

حيث :

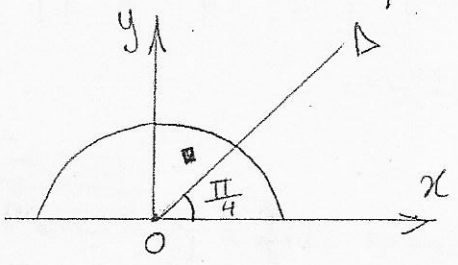
$$I_x = A \ , \ I_y = B \ , \ I_z = C \ , \ P_{yz} = D \ , \ P_{zx} = E \ , \ P_{xy} = F$$

ملاحظة : α, β, γ جيوب تمام توجيه Δ $\alpha = \cos\theta_1$ $\beta = \cos\theta_2$ $\gamma = \cos\theta_3$ θ_1 الزاوية التي يصنعها المحور Δ مع المحور ox

مثال :

أوجد عزم عطالة صفيحة بشكل نصف دائرة وذلك بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة ويقع في مستوي ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع القطر المحدد للصفيحة .

الحل :



ليكن o مركز الدائرة ، ox القطر المحدد ، و oy المحور التناظري للصفيحة .

$$A = I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm \ ; z = 0, \ dm = \rho r\,dr\,d\theta$$

$$y = r\sin\theta \ , \ x = r\cos\theta .$$

$$A = \int r^2\sin^2\theta\ \rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\int_0^\pi \left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right]d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{2}\cdot\frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{4}} \ ; M = \frac{\rho\pi R^2}{2}$$

$$B = I_y = \int (x^2 + z^2)\,dm = \int x^2\,dm = \int r^2\cos^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \left[\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{2}\cdot\frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{4}}$$

$$C = I_z = \int (x^2 + y^2)\,dm = \int r^2 \rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\pi = \frac{\rho\pi R^2}{2}\cdot\frac{R^2}{2} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

أو بطريقة أخرى :

$$C = I_z = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$D = P_{yz} = 0 \quad ; z = 0$$

$$E = P_{zx} = 0 \quad ; z = 0$$

$$F = P_{xy} = 0 \quad \text{لأن } oy \text{ محور تناظر}$$

نعوض في :

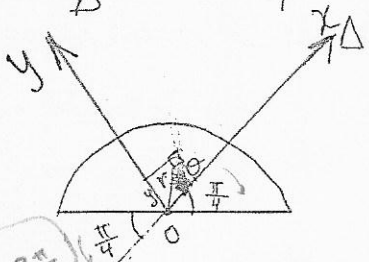
$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

لدينا :

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{4} \ , \ \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \ , \ \gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

ومنه عزم العطالة بالنسبة لـ Δ :

$$I_\Delta = A\cos^2\frac{\pi}{4} + B\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{2MR^2}{16} + \frac{2MR^2}{16} = \frac{MR^2}{4}$$



طريقة أخرى في الحل :

لو أخذنا المحور ox منطبق على Δ فيكون

$$I_\Delta = I_x = \int(y^2+z^2)\,dm = \int y^2\,dm$$

حيث $dm = \rho r\,dr\,d\theta$ ، $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ، $-\frac{\pi}{4} < \theta < \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

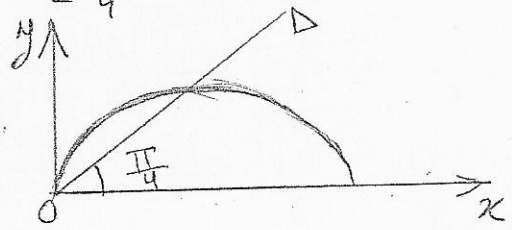
$$I_\Delta = I_x = \rho\int_0^R r^3\,dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{4} - \left(\frac{-\pi}{8} - \frac{\sin\frac{-\pi}{2}}{4}\right)\right] = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{4\pi}{8} = \frac{\rho\pi R^2}{2}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$$. وهو المطلوب

تمرين :

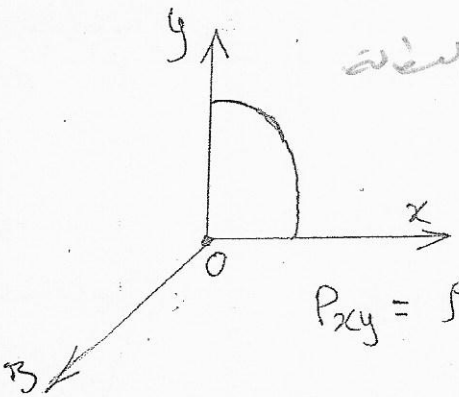
أوجد عزم عطالة صفيحة بشكل نصف دائرة وذلك بالنسبة لمحور مار من نقطة على محيط الدائرة يقع في مستوي ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع القطر. (بطريقتين)



تمرين :

أوجد جداءات العطالة لصفيحة ربع دائرية محدودة بالمحورين الاحداثيين وذلك بالنسبة للمستويات الاحداثية.

الحل : يمكن أن نأخذ $dm = \rho\,ds$ حيث ds هو عنصر المساحة



$$P_{xy} = \int xy\,dm \quad ; \quad dm = \rho\,dx\,dy$$

$$0 < x < R \quad , \quad 0 < y < \sqrt{R^2-x^2}$$

$$P_{xy} = \rho\int_0^R x\,dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \rho\int_0^R x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx = \frac{\rho}{2}\int_0^R x(R^2-x^2)\,dx$$

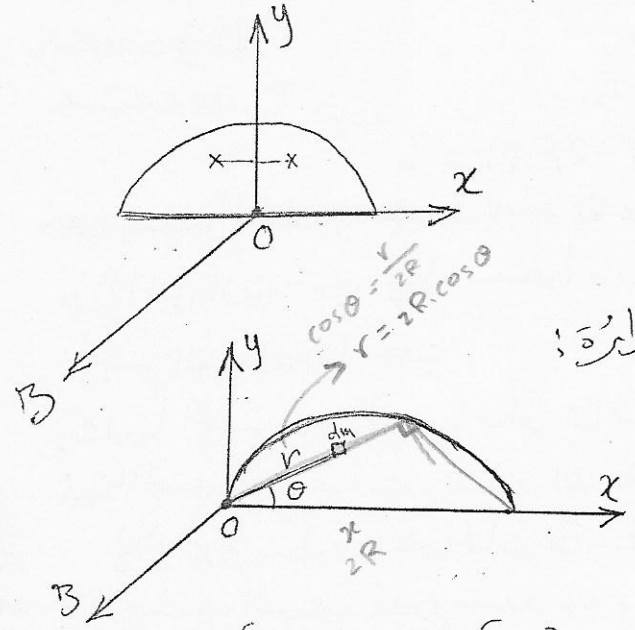
$$= \frac{\rho}{2}\left[\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho R^4}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\rho R^4}{8} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2\pi} = \frac{MR^2}{2\pi}$$

حيث : $M = \frac{\rho\pi R^2}{4}$

$$P_{yz} = \int y z \, dm = 0 \quad ; z = 0$$
$$P_{zx} = \int z x \, dm = 0 \quad ; z = 0$$

تمرين: فكرة بسيطة

أوجد جداءات العطالة لصفيحة نصف دائرية متجانسة بالنسبة للمستويات الاحداثية حيث مبدأ الاحداثيات هو مركز الدائرة والمحور ox هو القطر المحدد. ثم أوجد جداءات العطالة إذا كانت o تقع على محيط الدائرة وكان ox هو القطر المحدد.



الحل:

لدينا oy محور تناظر:

$$P_{xy} = \int x y \, dm = 0$$
$$P_{yz} = 0 \quad ; z = 0$$
$$P_{zx} = 0 \quad ; z = 0$$

- إذا كانت o مبدأ الاحداثيات تقع على محيط الدائرة:

$$x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta \;,\; dm = \rho r dr d\theta$$

$$P_{yz} = \int y z \, dm = 0 \quad ; z = 0$$
$$P_{xz} = \int x z \, dm = 0 \quad ; z = 0$$

$$P_{xy} = \int x y \, dm = \rho \int r^3 \sin\theta\cos\theta \, dr d\theta = \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^3 dr$$
$$= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, \frac{16R^4\cos^4\theta}{4} d\theta = -4R^4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d(\cos\theta)$$
$$= -4R^4\rho \left[\frac{\cos^6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{6}R^4\rho = \frac{\rho\pi R^2}{2} \cdot \frac{4}{3}\frac{R^2}{\pi} = \frac{4}{3}\frac{MR^2}{\pi}$$

حيث $M = \frac{\rho\pi R^2}{2}$ كتلة الصفيحة.

جسم العطالة: (جسم واقعي يجب)

عزم العطالة لمجموعة S حول محور Δ يمر من نقطة ثابتة o يعطى بالعلاقة:

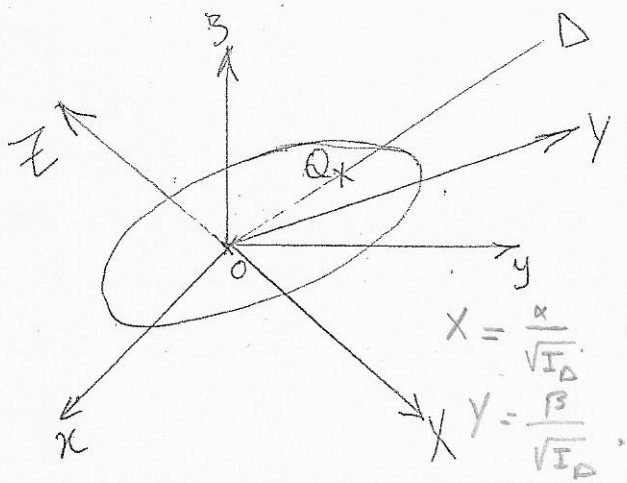
$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \qquad (1)$$

إذا جعلنا المحور Δ يدور فإن α, β, γ تتغير وبالتالي فعزم العطالة I_Δ يتغير.
لدراسة هذه التغيرات نأخذ النقطة Q على المحور التي بعدها عن o:

$\overline{oQ} = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}$ كلما تغير عزم العطالة تغيرت النقطة Q في الفضاء.

صناعة واحدة

$\sqrt{I_\Delta}$



متجه الموضع لهذه النقطة :

$$\vec{oQ} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_\Delta}} \Rightarrow \vec{u} = \sqrt{I_\Delta}\ \vec{oQ}$$

نرمز لاحداثيات Q بـ $Q(X,Y,Z)$:

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}} \quad \alpha = X\sqrt{I_\Delta}\ ,\ \beta = Y\sqrt{I_\Delta}\ ,\ \gamma = Z\sqrt{I_\Delta}$$

$$Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}}\ ,\ Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}$$

بالتعويض في (1) :

والقسمة على I_Δ نجد

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة Q عندما يتغير المحور Δ في جميع نقاط الفضاء

هذا المحل الهندسي يمثل سطحاً من الدرجة الثانية وهو مجسم قطع ناقص يدعى بمجسم العطالة الناقصي .

إن لهذا المجسم مستويات ومحاور تناظرية . تسمى المستويات التناظرية والمحاور التناظرية لهذا المجسم بالمستويات والمحاور الأساسية للعطالة . بمعنى لو أخذنا محاور جديدة مثل $ox'y'z'$ منطبقة على المحاور الأساسية فجداءات العطالة للجسم بالنسبة للمستويات الاحداثية الجديدة تصبح معدومة .

تسمى عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الجديدة (A', B', C') بعزوم العطالة الأساسية

وتصبح معادلة المجسم بالنسبة لهذه المحاور

$$A'X'^2 + B'Y'^2 + C'Z'^2 = 1$$

(معادلة مجسم العطالة الأساسي)

حيث X' , Y' , Z' احداثيات النقطة Q بالنسبة للمحاور الجديدة .

• إذا كانت النقطة o منطبقة على مركز ثقل الجسم c فيسمى مجسم ناقص العطالة بمجسم العطالة المركزي وتسمى مستويات التناظر ومحاوره التناظرية بالمستويات والمحاور المركزية للعطالة وتسمى عزوم العطالة بالنسبة للمحاور المركزية بعزوم العطالة المركزية .

ملاحظة

تسمى المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} I_x & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{xy} & I_y & P_{yz} \\ P_{xz} & P_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

تنسور عطالة الجسم .

كيف نوجد A', B', C' ؟ بالعمليات

الطريقة العامة لإيجاد عزوم العطالة الأساسية :

لتكن لدينا مجموعة المحاور الاحداثية $OXYZ$ والتي عزوم وجداءات العطالة بالنسبة لها هي: A, B, C, D, E, F

ولتكن حملة المحاور الأساسية $O\acute{X}\acute{Y}\acute{Z}$ حيث عزوم العطالة بالنسبة لها هي $\acute{A}, \acute{B}, \acute{C}$ ولتكن النقطة Q المعرفة سابقاً بالعلاقة:

$$I_\Delta \overline{OQ}^2 = 1$$

والتي احداثياتها بالنسبة للجملتين السابقتين: (X,Y,Z), $(\acute{X},\acute{Y},\acute{Z})$

عندما يتغير منحى المحور Δ يكون لدينا:

$$\overline{OQ}^2 = X^2+Y^2+Z^2 = \acute{X}^2+\acute{Y}^2+\acute{Z}^2$$

$$\varphi \equiv AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY = \acute{A}\acute{X}^2+\acute{B}\acute{Y}^2+\acute{C}\acute{Z}^2$$

حيث φ تابع للاحداثيات X,Y,Z أو للاحداثيات $\acute{X},\acute{Y},\acute{Z}$ ولنأخذ المقدار ϕ :

$$\phi = \varphi - \lambda \overline{OQ}^2$$

حيث λ عدد ما.

فيكون ϕ

$$\phi = AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY-\lambda(X^2+Y^2+Z^2)$$
$$= \acute{A}\acute{X}^2+\acute{B}\acute{Y}^2+\acute{C}\acute{Z}^2-\lambda(\acute{X}^2+\acute{Y}^2+\acute{Z}^2)$$

لنأخذ المعادلات التالية :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\acute{X}}=0 \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial\acute{Y}}=0 \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial\acute{Z}}=0 \qquad (1)$$

والتي تصبح بعد التعويض:

$$(\acute{A}-\lambda)\acute{X}=0 \quad , (\acute{B}-\lambda)\acute{Y}=0 \quad , \quad (\acute{C}-\lambda)\acute{Z}=0$$

وهي مجموعة معادلات خطية متجانسة. إذا أهملنا الحل الصفري $\acute{X}=0$, $\acute{Y}=0$, $\acute{Z}=0$ نجد أن لهذه المعادلات ثلاث حلول هي:

العملي عنصر طلب استشاع

1) $\acute{X} \neq 0$, $\acute{A} = \lambda$, $\acute{Y} = 0$, $\acute{Z} = 0$

2) $\acute{Y} \neq 0$, $\acute{B} = \lambda$, $\acute{X} = 0$, $\acute{Z} = 0$

3) $\acute{Z} \neq 0$, $\acute{C} = \lambda$, $\acute{X} = 0$, $\acute{Y} = 0$

أي أن قيم λ هي عزوم العطالة الأساسية للجسم وقيم $\acute{X}, \acute{Y}, \acute{Z}$ الموافقة هي أشكال توجيه المحور الأساسي الموافق.

إذا أخذنا المقادير :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial Z}$$

نجد أن :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \phi}{\partial \acute{X}} \cdot \frac{\partial \acute{X}}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial \acute{Y}} \cdot \frac{\partial \acute{Y}}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial \acute{Z}} \cdot \frac{\partial \acute{Z}}{\partial X}$$

لأن $\acute{X}, \acute{Y}, \acute{Z}$ توابع لـ X, Y, Z

باستخدام (1) نجد $\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0$

وبطريقة مشابهة نكتب قيمتي $\frac{\partial \phi}{\partial Y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial Z}$ وبتطبيق (1) نجد مجموعة المعادلات التالية :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial Y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0$$

باشتقاق ϕ والتعويض نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial X} &= (A-\lambda)X - FY - EZ = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y} &= -FX + (B-\lambda)Y - DZ = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial Z} &= -EX - DY + (C-\lambda)Z = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

وهي مجموعة معادلات جبرية متجانسة. لإيجاد الحل غير الصفر عندما يكون معين الأمثال معدوماً أي :

عزم عطالة ، استقامة ، نقطة ، مواقيت

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ λ . بحلها نجد ثلاث قيم وهي كما وجدنا عزوم العطالة الأساسية A', B', C' .

لإيجاد التجيبات الموجهة للمحاور الأساسية :

لدينا :

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}} \quad , \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}} \quad , \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}$$

نعوض في (2) :

$$\begin{aligned} (A-\lambda)\alpha - F\beta - E\gamma &= 0 \\ -F\alpha + (B-\lambda)\beta - D\gamma &= 0 \\ -E\alpha - D\beta + (C-\lambda)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

ولدينا :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

بتعويض قيمة λ في المعادلات الأخيرة بـ A', B', C' على الترتيب نجد قيم لـ α ، β ، γ التي تعين مناحي المحاور الأساسية .

مثال :

أوجد حجم العطالة لصفيحة مربعة طول ضلعها a وكثافتها (1) محصورة بالمحورين الإحداثيين ox ، oy . ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية واكتب معادلة حجم العطالة بالنسبة لمحاوره الأساسية .

الحل :

لنوجد عزوم وجداءات العطالة بالنسبة للمحاور ox, oy, oz فنجد :

$$A = I_x = \int y^2 dm \quad ; \quad dm = \rho dx dy \quad ; \rho = 1$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a y^2 dy = \frac{a^4}{3}$$

$$B = I_y = \int_0^a x^2 dm = \frac{a^4}{3}$$

$$C = I_z = I_x + I_y = A + B = \frac{2a^4}{3}$$

لأن الصفيحة مستوية $z = 0$; $E = P_{xz} = 0$, $D = P_{yz} = 0$

$$F = P_{xy} = \int xy\, dx\, dy = \frac{a^4}{4}$$

ومنه معادلة محور العطالة :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = 1$$

$$\frac{a^4}{3}X^2 + \frac{a^4}{3}Y^2 + \frac{2a^4}{3}Z^2 - \frac{a^4}{2}XY = 1$$

$$a^4\left[\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{3} + \frac{2Z^2}{3} - \frac{XY}{2}\right] = 1$$

محور العطالة :

لإيجاد عزوم العطالة الأساسية نكتب المحدد :

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{a^4}{3}-\lambda & -\frac{a^4}{4} & 0 \\ -\frac{a^4}{4} & \frac{a^4}{3}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a^4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد :

$$\left(\frac{2a^4}{3}-\lambda\right)\left[\left(\frac{a^4}{3}-\lambda\right)^2 - \frac{a^8}{16}\right] = 0$$

$$\left(\frac{2a^4}{3}-\lambda\right)\left[\left(\frac{a^4}{3}-\lambda+\frac{a^4}{4}\right)\left(\frac{a^4}{3}-\lambda-\frac{a^4}{4}\right)\right] = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{a^4}{12}\right)\left(\lambda - \frac{7a^4}{12}\right)\left(\lambda - \frac{2a^4}{3}\right) = 0$$

وبالتالي : $\lambda_1 = A' = \frac{a^4}{12}$, $\lambda_2 = B' = \frac{7a^4}{12}$, $\lambda_3 = C' = \frac{2a^4}{3}$

(قيم الذاتية هي عزوم العطالة الأساسية / الأشعة الذاتية المرتبطة بها هي محاور العطالة الأساسية)

لإيجاد المحاور الأساسية نكتب المعادلات :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a^4}{3}-\lambda\right)\alpha - \frac{a^4}{4}\beta = 0 \\ -\frac{a^4}{4}\alpha + \left(\frac{a^4}{3}-\lambda\right)\beta = 0 \\ \left(\frac{2a^4}{3}-\lambda\right)\gamma = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

بالتعويض عن λ بقيمة A' نجد المعادلات :

$$\lambda_1 = \frac{a^4}{12}$$

$$\frac{a^4}{4}\alpha - \frac{a^4}{4}\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha - \beta = 0}$$

$$\boxed{\gamma = 0}, \quad \boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1}$$

وحلّه:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 0$$

وهو منصف الربع الأول للمستوي oxy وهو المحور الأساسي الأول.

- بالتعويض عن λ بقيمتها β' نجد المعادلات:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

وحلّه هو:

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 0$$

وهو منصف الربع الثاني للمستوي oxy وهو المحور الأساسي الثاني

- وبالتعويض عن λ بقيمتها ζ' نجد المعادلات:

$$4\alpha + 3\beta = 0, \quad 3\alpha + 4\beta = 0, \quad 0\gamma = 0, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$$

وحلّه:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

وهو المحور oz نفسه، وهو المحور الأساسي الثالث.

فإذا أخذنا محاور جديدة $oX'Y'Z'$ حيث متجهات الواحدة على هذه المحاور على الترتيب هي:

$$\vec{K}(0,0,1), \quad \vec{J}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{I}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

تصبح معادلة مجسم القطاع بالنسبة لمحاور الأساسية:

$$A'X'^2 + B'Y'^2 + C'Z'^2 = 1$$

$$\frac{a^4}{12}\left[X'^2 + 7Y'^2 + 8Z'^2\right] = 1$$

وهو المطلوب.

مكتبة A to Z