كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك ٢

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

عزوم العطالة

1- عزم عطالة نقطة:

يعرف عزم عطالة نقطة مادية (P, m) كتلتها بالنسبة إلى نقطة ما O في الفضاء تبعد عن P مسافة r بأنه جداء كتلة هذه النقطة بمربع بعدها عن O ونكتب:

$$I_O = mr^2$$

• يعرف عزم عطالة النقطة (P, m) بالنسبة المحور Δ بأنه جداء كتلتها بمربع بعدها عن المحور Δ وليكن r أي:

$$I_\Delta = mr^2$$

• يعرف عزم عطالة النقطة (P, m) بالنسبة للمستوي π بأنه جداء كتلتها (هذه النقطة) بمربع بعدها عن هذا المستوي وليكن هذا البعد هو r:

$$I_\pi = mr^2$$

2- عزم عطالة مجموعة نقاط مادية:

إذا كانت لدينا مجموعة نقاط مادية (P_1, m_1) و (P_2, m_2) ، ... ، (P_n, m_n) فإن عزم عطالة المجموعة بالنسبة لنقطة أو محور أو مستوٍ هو مجموع عزوم عطالات هذه النقاط بالنسبة للنقطة أو المحور أو المستوي ويكون:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

حيث $r_1, r_2, \dots, r_n$ هي أبعاد هذه النقاط عن النقطة أو المحور أو المستوي، وبالتالي يمكن صياغة التعريف بالشكل التالي:

عزم عطالة مجموعة نقاط مادية بالنسبة لنقطة أو محور أو مستوٍ يساوي مجموع جداءات الكتل بمربعات الأبعاد عن النقطة أو المحور أو المستوي.

3- عزم عطالة الأجسام المادية:

ليكن لدينا جسم مادي يشغل جزءاً من الفضاء D (قد يكون سلكاً أو سطحاً أو حجماً)

يمكن اعتبار الجسم المادي على أنه مجموعة من الجزيئات أو النقاط المادية المتلاصقة والمتجاورة والغير منتهية العدد.

فإذا رمزنا لكتلة أحد هذه الجزيئات بـ dm_i وبعده عن النقطة أو المحور أو المستوي بـ r_i فيكون:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 dm_i$$

وبما أن مجموع اللامتناهيات في الصغر هو تكامل وبالتالي:

$$I = \int_D r^2 dm$$

ويكون هذا التكامل على طول قوس أو سطح أو حجم وذلك بحسب كون الحيز D الذي يشغله الجسم المادي سلكاً أو سطحاً أو حجماً.

إذا كانت ρ الكتلة النوعية للجسم (الكثافة الخطية أو الكثافة السطحية أو الكثافة الحجمية) فإن:

$$dm = \rho ds \quad \text{أو} \quad dm = \rho d\sigma \quad \text{أو} \quad dm = \rho dV$$

وذلك حسب كون الحيز D سلكاً أو سطحاً أو حجماً.

وبالتالي فإن عزم عطالة الجسم هو:

$$I = \int_L r^2 \rho ds \quad \text{أو} \quad I = \iint_S r^2 \rho d\sigma \quad \text{أو} \quad I = \iiint_V r^2 \rho dV$$

ملاحظة:

من تعريف عزم العطالة بأنه جداء الكتلة بمربع البعد وبما أن الكتلة موجبة أو صفر فإن عزم عطالة مجموعة نقاط هو كمية موجبة أو صفر.

وعزم عطالة الأجسام المادية هي أعداد موجبة أو صفر ولا يمكن أن تكون سالبة.

- إن عزم عطالة مجموعة أجسام يساوي إلى مجموع عزوم عطالات هذه الأجسام.

نصف قطر العطالة (نصف قطر التأرجح):

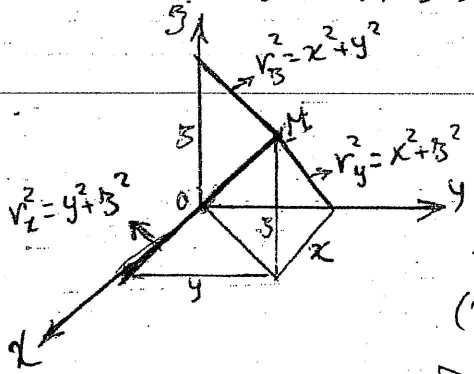
يدعى بالتعريف العدد K الذي يحقق العلاقة:

$$I = MK^2$$

حيث M هي الكتلة الكلية للمجموعة أو الجسم المادي.

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

نصف قطر العطالة (قطر التأرجح) للجسم بالنسبة لنقطة أو محور أو مستو حسب كون I عزم عطالة الجسم بالنسبة لنقطة أو محور أو مستو.



عزم العطالة بالنسبة للمحاور والمستويات الاحداثية:

لنفرض لدينا مجموعة نقاط مادية (P_1, m_1)، (P_2, m_2)، ...، (P_n, m_n) منسوبة إلى جملة الاحداثيات Oxyz والتي احداثياتها على الترتيب (x_1, y_1, z_1)، (x_2, y_2, z_2)، ... (x_n, y_n, z_n)

وبالتالي فعزم عطالة المجموعة بالنسبة لمركز الاحداثيات هو

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

وعزم عطالة هذه المجموعة بالنسبة للمحاور الاحداثية Ox , Oy , Oz على الترتيب:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + x_i^2)$$

وعزوم العطالة بالنسبة للمستويات الاحداثية oxy و oyz و ozx وهي على الترتيب:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

$$I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

إذا كانت المجموعة تشكل جسماً مستمراً فإن المجاميع السابقة تتحول إلى تكاملات أحادية أو ثنائية أو ثلاثية وفقاً لطبيعة الجسم المادي ، وتصبح على الشكل:

$$I_o = \int (x^2+y^2+z^2)\,dm \qquad (1)$$

$$I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \qquad (2)$$

$$I_y = \int (z^2+x^2)\,dm \qquad (3)$$

$$I_z = \int (x^2+y^2)\,dm \qquad (4)$$

$$I_{xy} = \int z^2\,dm \qquad (5)$$

$$I_{yz} = \int x^2\,dm \qquad (6)$$

$$I_{zx} = \int y^2\,dm \qquad (7)$$

$$\left\{\begin{aligned} I_o &= \int (x^2+y^2)\,dm \\ I_x &= \int y^2\,dm \\ I_y &= \int x^2\,dm \\ I_z &= \int (x^2+y^2)\,dm \\ I_{xy} &= 0 \\ I_{yz} &= \int x^2\,dm \\ I_{xz} &= \int y^2\,dm \end{aligned}\right.$$

ملاحظات:

$$I_o = I_z = I_x + I_y$$

$$I_x = I_{xz} \,,\; I_y = I_{yz}$$

العلاقات بين عزوم العطالة المختلفة :

- من العلاقات (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن :

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right)$$

(أي أن مجموع عزوم العطالة حول ثلاث محاور متعامدة فيما بينها لا يتعلق بتوجيه تلك المحاور) (ويساوي ضعف عزم العطالة حول نقطة تلاقي المحاور o) .

- ومن العلاقات (1) و (5) و (6) و (7) نجد :

$$I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$$

أي أن :
عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لنقطة يساوي $\frac{1}{2}$ مجموع عزوم عطالتها بالنسبة لثلاثة محاور متعامدة تمر بتلك النقطة أو يساوي إلى مجموع عزوم عطالتها بالنسبة لثلاث مستويات متعامدة تمر بتلك النقطة .

سؤال؟؟؟ برهن أن عزم العطالة بالنسبة لأي محور من المحاور الاحداثية دائماً أصغر من مجموع عزوم العطالة بالنسبة للمحورين وأكبر من فرقهما.

- من العلاقات الستة الأخيرة نجد :

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$
$$I_y = I_{yx} + I_{yz}$$
$$I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

أي أن :
عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لمستقيم يساوي إلى مجموع عزمي عطالتها بالنسبة لمستويين متعامدين فصلهما المشترك هو هذا المستقيم .

- ونجد أيضا من العلاقات السابقة :

$$I_o = I_{xy} + I_z = I_{yz} + I_x = I_{zx} + I_y$$

أي أن :
عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة لنقطة يساوي لمجموع عزوم عطالتها بالنسبة لمحور ومستو متعامدين ومتقاطعين بهذه النقطة .

نظرية هويغنز الأولى :

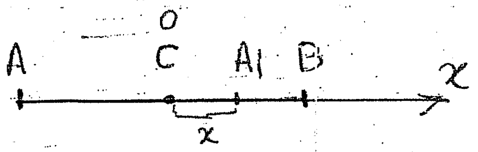
1- عزم عطالة مجموعة نقاط أو أجسام مادية بالنسبة لنقطة يساوي لعزم عطالة هذه المجموعة بالنسبة لمركز كتلتها مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة بمربع البعدين النقطتين .

2- عزم عطالة مجموعة نقاط أو أجسام مادية بالنسبة لمحور Δ يساوي لعزم عطالة المجموعة بالنسبة لمحور Δ' مار من مركز كتل المجموعة وموازٍ للمحور Δ مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة بمربع البعد بين المحورين .

3- عزم عطالة مجموعة نقاط أو أجسام مادية بالنسبة لمستوي P يساوي لعزم عطالة المجموعة بالنسبة لمستوي P' مار من مركز كتل المجموعة وموازي للمستوي P مضافاً إليه جداء كتلة المجموعة بمربع البعد بين المستويين .

تمرين :
أوجد عزم عطالة سلك متجانس بشكل قطعة مستقيمة طولها L وكتلته M وذلك :
1) بالنسبة لمركز ثقله
2) بالنسبة لأحد طرفيه
3) بالنسبة لمستقيم منطبق عليه ثم بالنسبة لمستوي منطبق عليه .
4) بالنسبة لمستقيم عمودي عليه في منتصفه
5) بالنسبة لمستقيم عمودي عليه في إحدى طرفيه وبالنسبة لمستوي عمودي عليه في إحدى طرفيه
6) بالنسبة لمستقيم مار من إحدى نهايتيه ويصنع زاوية α وبالنسبة لمستوي مار من إحدى نهايتيه يصنع معه زاوية α .
7) بالنسبة لمستقيم موازي للسلك ، ثم بالنسبة لمستقيم مار من مركز الكتل ويصنع زاوية α مع السلك .

الحل :



1) نجزأ السلك إلى عناصر صغيرة ولتكن A_i
نبعدها عن C مركز الكتل (كتل السلك)
هو x وكتلته dm حيث $dm=\rho dx$

$$I_C=\int r^2 dm=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\rho dx=\frac{\rho L^3}{12}$$

ولكن $M=\rho L \Leftarrow \rho=M/L \Leftarrow$

$$I_C=\frac{ML^2}{12}$$

2)
$$I_A=\int r^2 dm=\rho\int_0^L r^2 dr=\rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L=\frac{\rho L^3}{3}=\frac{ML^2}{3}$$

وهو عزم عطالة السلك بالنسبة لأي من طرفيه

÷ يمكن حلها عن طريق هويغنز

$$I_A=I_C+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{ML^2}{12}+\frac{ML^2}{4}=\frac{ML^2}{3}$$

3) ليكن Δ مستقيم منطبق على السلك. فعزم عطالة السلك بالنسبة لـ Δ

$$I_\Delta=I_x=\int(y^2+z^2)dm$$

ولكن $y=z=0$ تكون معدومة لنقاط السلك $\Leftarrow$

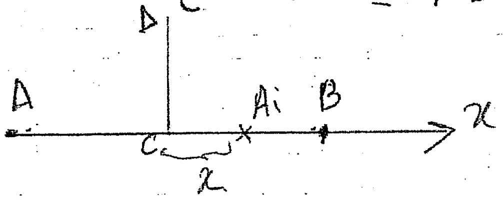
$$I_\Delta=0$$

ـ بالنسبة لمستو منطبق عليه :

$$I_{xy}=\int z^2 dm=0$$

$$I_{xz}=\int y^2 dm=0$$

4) ليكن Δ مستقيم عمودي على السلك AB في منتصفه C



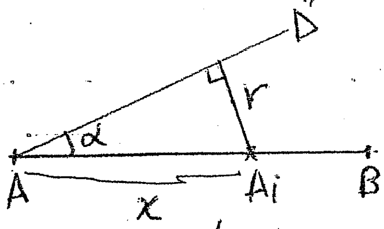
$$I_\Delta=\int r^2 dm=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\rho dx=\frac{ML^2}{12}=I_C$$

5) ليكن Δ مستقيم عمودي عليه في A.

$$I_\Delta=\int r^2 dm=\int_0^L r^2\rho dr=\frac{ML^2}{3}=I_A$$

$$I_{yz}=\int_0^L x^2 dm=\frac{ML^2}{3}$$

6) ليكن Δ'' مستقيم يمر من A ويصنع زاوية α مع AB



$$I_{\Delta''}=\int r^2 dm$$

$$r=x\sin\alpha \quad , \quad dm=\rho dx$$

$$I_{\Delta''}=\rho\int_0^L x^2\sin^2\alpha\, dx=\rho\sin^2\alpha\int_0^L x^2 dx=\rho\sin^2\alpha\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L=\rho\sin^2\alpha\frac{L^3}{3}$$

$$=\frac{ML^2}{3}\sin^2\alpha$$

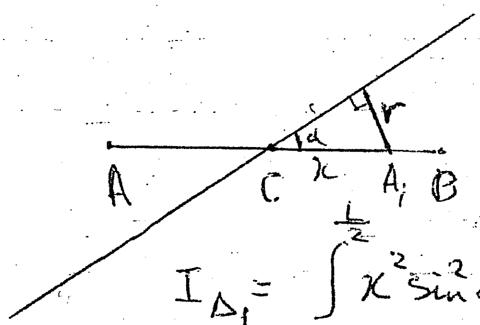
لتكن P مستوى مار من A ويصنع زاوية α مع السلك.

$$I_P = \rho\int_0^L x^2\sin^2\alpha\,dx = \rho\sin^2\alpha\int_0^L x^2dx = \rho\sin^2\alpha\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}\sin^2\alpha$$

7) لتكن Δ مستقيم موازي للسلك.
بفرض بعد المستقيم عن السلك هو a فيكون

$$I_\Delta = \int r^2dm = \int a^2dm = a^2\int dm = a^2M$$

- لتكن Δ_1 مستقيم مار من مركز الكتلة ويصنع زاوية α مع السلك فيكون:

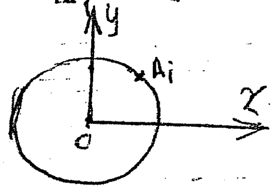


$$I_{\Delta_1} = \int r^2dm \quad ; \quad r = x\sin\alpha$$

$$I_{\Delta_1} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\sin^2\alpha\,dm = \rho\sin^2\alpha\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}\sin^2\alpha$$

أو باستخدام هويغنز حيث تكون البعد بين المستقيمين $\frac{L}{2}\sin\alpha$

$$I_{\Delta_1} = I_{\Delta} - M\frac{L^2}{4}\sin^2\alpha = \frac{ML^2}{12}\sin^2\alpha$$



تمرين: أوجد عزم عطالة سلك دائري متجانس وذلك
1) بالنسبة لمركز دائرته
2) بالنسبة لقطر الدائرة
3) بالنسبة لنقطة من محيطه ثم بالنسبة لمماسه.

الحل:
1) لنأخذ محورين متعامدين ox, oy. لنجزئ السلك إلى عناصر صغيرة ولتكن إحداها A_i
كتلته dm فيكون بعد A_i عن o هو $R=r$

$$I_o = \int r^2dm = R^2\int dm = MR^2$$

M كتلة السلك.

[كان بالإمكان أخذ بالإحداثيات القطبية $dm=\rho r\,d\theta$; $r=R$

$$I_o = \int r^2dm = R^3\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta$$
$$I_o = 2\pi\rho R.R^2 = MR^2$$

2) حساب عزم عطالة السلك بالنسبة لقطره:

$$I_o = I_x + I_y$$

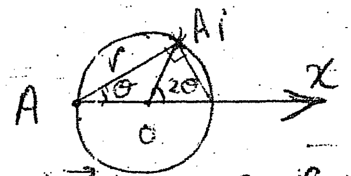
ولكن $I_x = I_y$ بسبب التناظر (لأن الجسم هو دائرة فإذا بدلنا x بـ y أو y بـ x فإن معادلة الدائرة لا تتغير)

$$I_o = 2I_x \Rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2}I_o = \frac{1}{2}MR^2$$

[كان بالإمكان الحل بالشكل التالي:

$$I_x = \int r^2dm = \int R^2\sin^2\theta(\rho R\,d\theta) = \rho R^3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \rho R^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$= \rho R^3\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \rho R^3\left[\frac{2\pi}{2}\right] = 2\rho\pi R\,\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} \quad ; \quad M = 2\pi\rho R$$]

3) بالنسبة لنقطة من محيطه



نأخذ A نقطة من محيطه ولنسم القطر المار من O و A بالمحور Ax . A هو قطب الاحداثيات القطبية فإن A_i تتحدد بـ r و θ حيث $r=|AA_i|$

$$\begin{cases} r = 2R\cos\theta \\ dm = \rho\, ds \end{cases}$$

حيث ds هو طول قوس من الحلقة أي أن : $ds = R\,d(2\theta) = 2R\,d\theta$

$$\Rightarrow dm = 2\rho R\, d\theta$$

عزم العطالة بالنسبة لـ A :

$$I_A = \int r^2 dm = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2R\cos\theta)^2 \cdot 2\rho R\, d\theta$$

$$= 8R^3\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = 8R^3\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

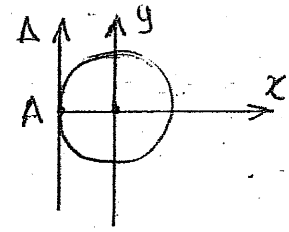
(θ تتحول من $-\frac{\pi}{2}$ إلى $\frac{\pi}{2}$ معنى أن التكامل $I_A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$I_A = 16R^3\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 8R^3\rho \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^3\rho\pi$$

ولكن $M = 2\pi R\rho$

$$\Rightarrow I_A = 2MR^2$$

- لإيجاد عزم العطالة بالنسبة للمماس المار من A



$$I_A = I_\Delta + I_{Ax}$$

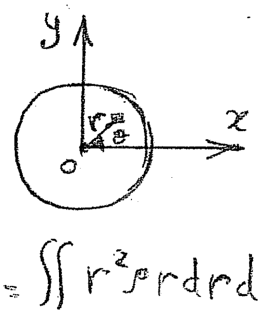
لدينا :

$$I_A = 2MR^2 \quad , \quad I_{Ax} = I_x = \frac{MR^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_\Delta = I_A - I_{Ax} = 2MR^2 - \frac{MR^2}{2} = \frac{3MR^2}{2}$$

تمرين : قرص دائري متجانس نصف قطره R (صفيحة دائرية) أوجد عزم عطالته

1) بالنسبة لمركزه
2) بالنسبة لقطره
3) بالنسبة لمحور عمودي عليه في مركزه
4) بالنسبة لنقطة واقعة على محيطه
5) بالنسبة للمماس الواقع في مستويه.



الحل : 1)

$$I_o = \int r^2 dm$$

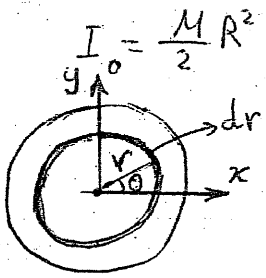
حيث :

$$dm = \rho\, d\sigma = \rho\, r\, dr\, d\theta$$

و dσ عنصر السطح (السطح العنصري)

$$I_o = \iint r^2 \rho\, r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\rho\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho}{2}\pi R^4$$

لدينا كتلة الصفيحة $\Leftarrow M = \rho \pi R^2$



ـ طريقة أخرى: تجزئة القرص إلى حلقات دائرية متمركزة في O

فيكون سطحها $2\pi r dr$ كتلتها $dm = \rho 2\pi r dr$

$$I_0 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho 2\pi r dr$$

$$I_0 = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\rho\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

2) من تناظر الشكل نجد أن عزم العطالة بالنسبة لأي قطر يساوي لعزم العطالة بالنسبة للمحور Ox :

$$I_x = I_y$$

$$I_0 = I_x + I_y \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \int (x^2+y^2) dm = I_z \Rightarrow I_0 = I_z \\ I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \Rightarrow I_0 = I_x + I_y \end{array} \right\}$$

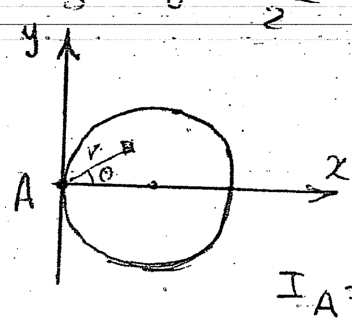
$$I_0 = 2 I_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_0 = \frac{MR^2}{4}$$

أو من الممكن حساب I_x :

$$\left\{ I_x = \int y^2 dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 \rho r dr d\theta = \frac{MR^2}{4} \right.$$

3)

$$I_z = I_0 = \frac{MR^2}{2}$$



4) لتكن A نقطة من محيط القرص و Ax قطر للدائرة

نجزئ القرص إلى عناصر صغيرة فتكون كتلتها :

$$dm = \rho d\sigma = \rho r dr d\theta$$

وبعدها عن A هو r

$$I_A = \int r^2 dm = \int r^2 \rho r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^3 dr$$

$$= \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^4 4 \cos^4\theta d\theta = \rho R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]^2 d\theta =$$

$$= \rho R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta = \rho R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\cos 2\theta + \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= \rho R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right] d\theta = \rho R^4 \left(\frac{3}{2}\pi\right) = \rho R^4 \frac{3}{2}\pi$$

لدينا : $M = \rho \pi R^2 \Leftarrow$

$$I_A = \frac{3}{2} MR^2$$

5)

$$I_{Ay} = I_A - I_{Ax} = \frac{3}{2}MR^2 - \frac{MR^2}{4} = \frac{5}{4}MR^2$$