كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الأولى : مراكز الكتل (مراكز العطالة)

مركز كتل (عطالة) مجموعة نقاط مادية :

لنفترض وجود مجموعة مادية S مؤلفة من n نقطة مادية كتلتها m_n :

$$(P_1, m_1) \ , \ (P_2, m_2) \ , \ \dots\dots \ , \ (P_n, m_n)$$

$$m_1 \overrightarrow{CP_1} + m_2 \overrightarrow{CP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{CP_n} = \vec{0}$$

بإستعمال علاقة شال

$$m_1 \overrightarrow{CO} + m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{CO} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{CO} + m_n \overrightarrow{OP_n} = \vec{0}$$

$$m_1 \overrightarrow{CO} + m_2 \overrightarrow{CO} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{CO} + m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{OP_n} = \vec{0}$$

$$(m_1 + m_2 + \dots\dots + m_n) \overrightarrow{OC} = m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{OP_n}$$

$$M \overrightarrow{OC} = m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{OP_n}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots\dots + m_n \overrightarrow{OP_n}}{M} \quad \dots\dots (*)$$

إنّ C مركز الكتل أو مركز العطالة أو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

P_1 مثقلة بـ m_1 ، $\dots\dots$ ، P_n مثقلة بـ m_n بحيث

$$M = m_1 + \dots + m_n \neq 0$$

$$C(x_c, y_c, z_c)$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots\dots + m_n x_n}{M}$$

وذلك بعد إسقاط العلاقة (*)

على المحاور الإحداثية

$$(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$$

فحصلنا على هذه العلاقات

الجبرية التي تعيّن

مركز كتل المجموعة S

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots\dots + m_n y_n}{M}$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots\dots + m_n z_n}{M}$$

مركز كتل الأجسام المادية :

وذلك حسب هذا الجسم : 1 إن كان الجسم خطي (خيط ، سلك) : (S) :

$$x_c = \frac{\int_S x\,dm}{M} = \frac{\int_S x\,\rho\,ds}{M} = \frac{\int_S x\,ds}{S}$$

$$y_c = \frac{\int_S y\,dm}{M} = \frac{\int_S y\,\rho\,ds}{M} = \frac{\int_S y\,ds}{S}$$

$$z_c = \frac{\int_S z\,dm}{M} = \frac{\int_S z\,\rho\,ds}{M} = \frac{\int_S z\,ds}{S}$$

حيث الكثافة الخطية

$$\rho = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{S}$$

2 إن كان الجسم سطحي : (σ) :

$$x_c = \frac{\int_\sigma x\,dm}{M} = \frac{\int_\sigma x\,\rho\,d\sigma}{M} = \frac{\int_\sigma x\,d\sigma}{\sigma}$$

$$y_c = \frac{\int_\sigma y\,dm}{M} = \frac{\int_\sigma y\,\rho\,d\sigma}{M} = \frac{\int_\sigma y\,d\sigma}{\sigma}$$

$$z_c = \frac{\int_\sigma z\,dm}{M} = \frac{\int_\sigma z\,\rho\,d\sigma}{M} = \frac{\int_\sigma z\,d\sigma}{\sigma}$$

حيث الكثافة السطحية

$$\rho = \frac{dm}{d\sigma} = \frac{M}{\sigma}$$

3 إن كان الجسم حجمي : (V) :

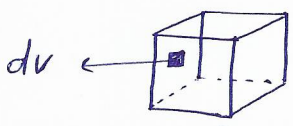
$$x_c = \frac{\int_V x\,dm}{M} = \frac{\int_V x\,\rho\,dv}{M} = \frac{\int_V x\,dv}{V}$$

$$y_c = \frac{\int_V y\,dm}{M} = \frac{\int_V y\,\rho\,dv}{M} = \frac{\int_V y\,dv}{V}$$

$$z_c = \frac{\int_V z\,dm}{M} = \frac{\int_V z\,\rho\,dv}{M} = \frac{\int_V z\,dv}{V}$$

حيث الكثافة الحجمية

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{m}{V}$$



ملاحظة في الأجسام المتجانسة يكون ρ عدد ثابت وبالتالي يمكن إخراجه خارج التكامل ، مثل :

$$x_c = \frac{\int_S x\,\rho\,ds}{M} = \frac{\rho\int_S x\,ds}{M}$$

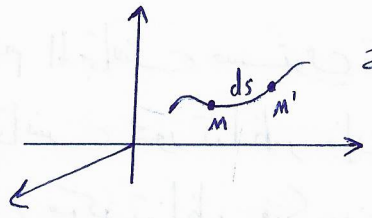
العناصر الجزئية في الإحداثيات المختلفة

إن تعيين مراكز كتل لجسم يتطلب كلاً من عنصر الطول أو السطح أو الحجم ds أو $d\sigma$ أو dv وذلك يتوقف على جملة المحاور الإحداثية المختارة فنجد مثلاً :

عنصر الطول في الإحداثيات الديكارتية

$$ds = MM'$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$



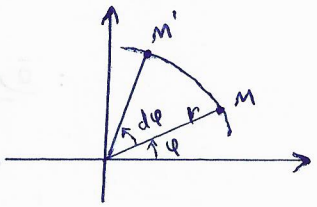
$M(x, y, z)$

$M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

عنصر الطول في الإحداثيات القطبية

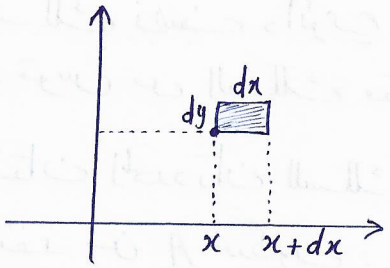
$$ds = \overset{\frown}{MM'}$$

$$ds = r\, d\varphi$$



عنصر السطح في الإحداثيات الديكارتية

$$d\sigma = dx\, dy$$

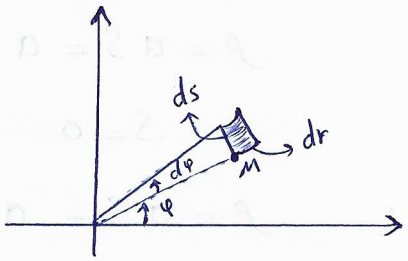


عنصر السطح في الإحداثيات القطبية

$$d\sigma = ds\, dr$$

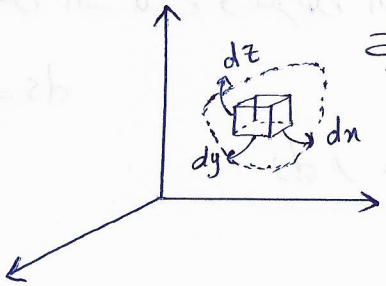
$$d\sigma = r\, d\varphi\, dr$$

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi$$



عنصر الحجم في الإحداثيات الديكارتية

$$dv = dx\, dy\, dz$$



عنصر الحجم في الإحداثيات الأسطوانية

$$dv = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

عنصر الحجم في الإحداثيات الكروية

$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

ونجد الملاحظة إلى أنه لاختيار نوع الإحداثيات دور مهم في تسهيل عمليات التكاملات الواجب اجراؤها لتعيين مركز الكتل وهذا الاختيار يتوقف على طبيعة الجسم، فمثلاً :

1- في حالة الأشكال (الأجسام) الدائرية يفضل استخدام الإحداثيات القطبية
2- في حالة الأجسام الكروية يفضل استخدام الإحداثيات الكروية
3- في حالة الأجسام الدورانية أو الأسطوانية يفضل استخدام الإحداثيات الأسطوانية

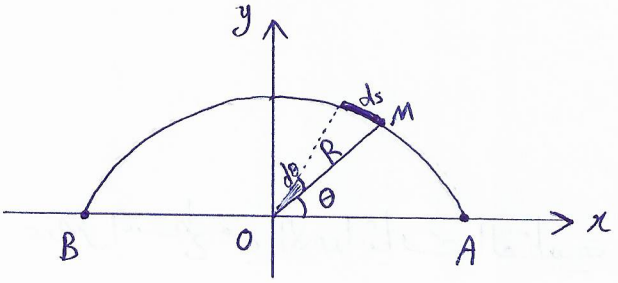
ملاحظة - إذا كان للجسم المتجانس مستوى تناظر فإن مركز الكتل يقع في هذا المستوى
- إذا كان للجسم المتجانس محور تناظر فإن مركز الكتل يقع على هذا المحور
- إذا كان للجسم المتجانس مركز تناظر فيكون هذا المركز هو مركز الكتل

مراكز كتل بعض الأجسام الشهيرة :

مركز كتل سلك نصف دائري

تمرين : أوجد مركز كتل سلك نصف دائري نصف قطره R وكثافته $\rho = a.S$ حيث a ثابت و s طول قوس من السلك مقاساً من نقطة محددة له.

الحل : لتكن A و B النقطتان المحددتان للسلك



إذا كانت المقاسات تنفذ من A فيكون :

كثافة النقطة M : $\rho = a\,S = a\,R\theta$

كثافة النقطة A : 0 لأن $S = 0$

كثافة النقطة B : $\rho = a\,S = a\,\pi\,R$ ، لنوجد مركز الكتل C :

نأخذ جسيم عنصري في الموقع θ من السلك ولنفرض أن طوله ds وكتلته dm وكثافته ρ ، ولدينا : $ds = R\,d\theta$

حيث $x = R\cos\theta$ ، $dm = \rho\,ds$

$$x_C = \frac{\int_S x\,dm}{M} = \frac{\int_S R\cos\theta\,\rho\,ds}{M}$$

و $y = R\sin\theta$

$$y_C = \frac{\int_S y\,dm}{M} = \frac{\int_S R\sin\theta\,\rho\,ds}{M}$$

ولكن : $M = \int_S dm = \int_S \rho\,ds$

$$M = \int_S \rho R\,d\theta = \int_0^{\pi} a.s\,R\,d\theta = aR\int_0^{\pi} s\,d\theta = aR\int_0^{\pi} R\theta\,d\theta$$

$$= aR^2\int_0^{\pi}\theta\,d\theta = aR^2\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\pi} = aR^2\frac{\pi^2}{2}$$

$$x_c = \frac{\int_0^{\pi} R\cos\theta \; aR\theta \; R d\theta}{aR^2 \frac{\pi^2}{2}} = \frac{aR^3 \int_0^{\pi} \theta\cos\theta \, d\theta}{aR^2 \frac{\pi^2}{2}}$$

$$= \frac{2R}{\pi^2} \int_0^{\pi} \theta\cos\theta \, d\theta = \frac{2R}{\pi^2} \left([\theta\sin\theta]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \right) = \frac{-4R}{\pi^2}$$

$$y_c = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta \; aR\theta \; R d\theta}{aR^2 \frac{\pi^2}{2}} = \frac{aR^3 \int_0^{\pi} \theta\sin\theta \, d\theta}{aR^2 \frac{\pi^2}{2}}$$

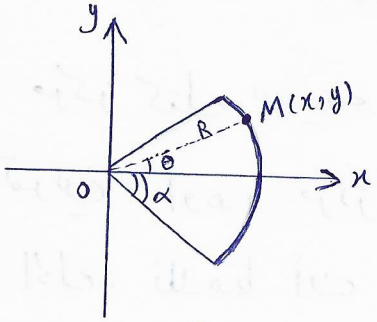
$$= \frac{2R}{\pi^2} \int_0^{\pi} \theta\sin\theta \, d\theta = \frac{2R}{\pi^2} \left([-\theta\cos\theta]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos\theta \, d\theta \right) = \frac{2R}{\pi}$$

ومنه $C\left(-\frac{4R}{\pi^2}, \frac{2R}{\pi}\right)$ وهو المطلوب

ملاحظة: بما أن السلك غير متجانس فإن مركز الكتلة لا يقع على محور تناظر هذا الجسم.

مركز كتلة سلك دائري متجانس

تمرين: أوجد مركز كتلة سلك دائري متجانس بشكل قوس دائري زاويته 2α ونصف قطره R.



الحل: لنأخذ جملة إحداثيات $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ فيها ox ينطبق على محور تناظر السلك، فمركز الكتلة يقع على هذا المحور أي أن: $y_c = 0$، لنوجد x_c:

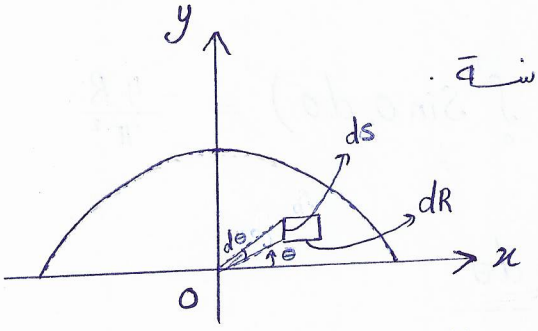
$$x_c = \frac{\int_S x \, dm}{M} = \frac{\int_S x \rho \, ds}{\int_S dm} = \frac{\int_S x \rho \, ds}{\int_S \rho \, ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta \; \rho R \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R \, d\theta}$$

$$= \frac{R^2 \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, d\theta}{R\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{R \, [\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ومنه مركز الكتلة $C\left(R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$

وبحالة خاصة: إذا كان السلك (القوس) نصف دائري أي أن $\alpha = \frac{\pi}{2}$ فإن $C\left(\frac{2R}{\pi}, 0\right)$

مركز كتلة صفيحة نصف دائرية



تمرين : أوجد مركز كتلة صفيحة نصف دائرية متجانسة.

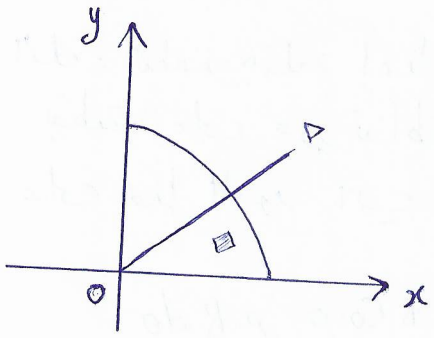
الحل : للصفيحة محور تناظر مار من مركزها وليكن oy وبالتالي مركز الكتلة يقع على المحور oy (محور التناظر) ومنه $x_c = 0$ ، لنوجد y_c :

$$y_c = \frac{\int_\sigma y\, dm}{\int_\sigma dm} = \frac{\int_\sigma R\sin\theta\, \rho\, d\sigma}{\int_\sigma \rho\, d\sigma} = \frac{\int_0^\pi \int_0^R R\sin\theta\, R\, dR\, d\theta}{\int_0^\pi \int_0^R R\, dR\, d\theta}$$

$$= \frac{\int_0^\pi \left[\frac{R^3}{3}\sin\theta\right]_0^R d\theta}{\int_0^\pi \left[\frac{R^2}{2}\right]_0^R d\theta} = \frac{\int_0^\pi \frac{R^3}{3}\sin\theta\, d\theta}{\int_0^\pi \frac{R^2}{2}\, d\theta} = \frac{\left[-\frac{R^3}{3}\cos\theta\right]_0^\pi}{\left[\frac{R^2}{2}\theta\right]_0^\pi} = \frac{4R}{3\pi}$$

أي $C\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$

مركز كتلة صفيحة ربع دائرية



تمرين : أوجد مركز كتلة صفيحة ربع دائرية متجانسة.

الحل : نلاحظ أن Δ محور تناظر للصفيحة :

$$\Delta : y = x$$

C مركز الكتلة للصفيحة ، بما أن $C \in \Delta$ $\leftarrow$ $x_c = y_c$

$$x_c = \frac{\int_\sigma x\, dm}{M} = \frac{\int_\sigma x\, \rho\, d\sigma}{\int_\sigma \rho\, d\sigma} = \frac{\rho \int_\sigma x\, d\sigma}{\rho \int_\sigma d\sigma} = \frac{\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, R\, d\theta\, dR}{\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, d\theta\, dR}$$

$$= \frac{\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta\, R\, d\theta\, dR}{\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, d\theta\, dR} = \frac{4R}{3\pi}$$

أي $C\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$

مكتبة A to Z