كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تعريف: ليكن $f(z)$ تابع وحيد القيمة يقال إنّ $z=a$ نقطة شاذة ذات جهة واحدة للتابع $f(z)$ إذا لم يكن تحليلياً في a

- تسمّى النقطة الشاذة $z=a$ حيث $a \neq \infty$ معزولة للتابع f إذا كان f تحليلياً في جوار a الموخوذ $0<|z-a|<r$ أي إذا أمكن إحاطة النقطة a بدائرة لا تحوي داخلها أية نقطة شاذة للتابع f سوى a.
- النقطة $z=\infty$ معزولة للتابع $f(z)$ إذا كان f تحليلياً في جوار $z=\infty$ الموخوذ $R<|z|<+\infty$ أي إذا وجدت دائرة مركزها المبدأ بحيث لا يقع خارجها أي نقطة شاذة لـ f سوى ∞
- تسمى النقطة $z=\infty$ نقطة شاذة للتابع إذا كانت النقطة $\zeta=0$ شاذة للتابع $f(\frac{1}{\zeta})$ إذا لم تكن النقطة الشاذة a معزولة نسمّيها نقطة شاذة غير معزولة ومن الواضح أنّه كي يوجد نقطة شاذة غير معزولة لتابع f يجب أن يكون عدد النقاط الشاذة للتابع f غير منتهي وعندئذٍ تكون تلك النقطة نقطة تراكم لمجموعة النقاط الشاذة

$f(z)=\frac{1}{\sin z}$ $\quad z=n\pi$; $n\in\mathbb{N}$

- **تصنيف النقاط الشاذة المعزولة:**

لتكن a نقطة شاذة معزولة لتابع وحيد القيمة f (يمكن أن تكون $a=\infty$) فإنّ a تسمّى:

1) شاذة قابلة للإزالة (الإصلاح): إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ موجودة ومحدودة

مثال: $f(z)=\frac{z^2+1}{z+i}$; $z=-i$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح لأنّ:

$$\lim_{z\to -i} f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{(z-i)(z+i)}{(z+i)}=\lim_{z\to -i}(z-i)=-2i$$

$$\Rightarrow g(z)=\begin{cases} f(z) & ; \quad z\neq -i \\ -2i & ; \quad z=-i \end{cases}$$

2. قطباً للتابع f: إذا كانت النهاية موجودة وغير محدودة $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$

3. شاذة أساسية للتابع f: إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ غير موجودة وغير محدودة

مثال: • النقطة $z=0$ لـ $\cos\frac{1}{z}$ و $\sin\frac{1}{z}$

• النقطة $z=\infty$ لـ $\cos z$ و $\sin z$

• العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

- يحدد القسم الرئيسي من سلسلة لوران لتابع وحيد القيمة f حول النقطة الشاذة $z_0=a$ نوع هذه النقطة وبالعكس بمعرفة نوع هذه النقطة نستطيع معرفة القسم الرئيسي

أ. النقطة الشاذة القابلة للإصلاح:

مبرهنة: لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة للتابع f عندئذٍ تكون $z=a$ قابلة للإصلاح لتابع f إذا وفقط إذا كان القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع f حول a معدوماً (غير موجود).

ب. القطب:

مبرهنة: لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة للتابع f عندئذٍ مايلي:

1) $f(z)=(z-a)^{-m}\cdot\varphi(z)$

• $a\neq\infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان:

حيث $\varphi(z)$ تابع تحليلي لا ينعدم في النقطة a و $m\geq 1$ عدد صحيح

2) $f(z)=z^m h(z)$

• $a=\infty$ قطباً للتابع f إذا وفقط إذا كان

حيث $h(z)$ تابع تحليلي لا ينعدم في النقطة ∞ و $m\geq 1$ عدد صحيح

ملاحظة: $z=a$ يكون قطب من المرتبة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كانت $z=a$ صفراً من المرتبة m للتابع $\frac{1}{f(z)}$.

ج. نقطة شاذة أساسية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة لتكن a نقطة شاذة معزولة للتابع f تكون النقطة a شاذة أساسية للتابع f إذا وفقط إذا كانت عدد حدود القسم الرئيسي في سلسلة لوران لتابع f حول a غير منتهٍ.

مثال: أوجد نقاط الشاذة في المستوي العقدي c لكل من التوابع f التالية وحدد نوع كل نقطة؟

a) $\frac{1}{sh\frac{1}{z}}$ b) $\frac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}$

c) $\frac{1}{e^{\frac{1}{z^3}}+1}$ d) $\ln(z)$

الحل: a) $\frac{1}{sh\frac{1}{z}}$

$sh\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z_k}=\pi k i \quad ; \quad k=\pm1,\pm2,\dots$

وبما أن z_k أصفار بسيطة للتابع $g(z)=\frac{1}{sh\frac{1}{z}}$ فإن نقاط الشاذة بسيطة للتابع $f=\frac{1}{g}$

b) $f(z)=\frac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}$; $z=0$ قطب $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

نستخدم أوبيتال مرتين:

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(e^z-1)^3}{1-\cos z}$$

$$g(z)=0 \iff (e^z-1)^3=0 \iff e^z-1=0 \iff z=0$$

نكتب منشور e^z و $\cos z$:

$$g(z)=z\,\varphi(z)$$

$$\frac{\left[\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)-1\right]^3}{1-\left[1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\dots\right]}=\frac{\left[\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots\right]^3}{\left[\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right]}$$

نخرج z من البسط و z^2 من المقام:

$$\frac{z^3\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots\right)^3}{z^2(1+\dots)}$$

$z=0$ قطب بسيط

c) و d) وظيفة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة