كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

حل المعادلات الآتية:

① $x^2y'' - xy' - 3y = x^5$

② $(x+2)^2y'' + (x+2)y' - y = x$

③ $(2x-3)^2y'' - 6(2x-3)y' + 12y = 1 + 2x$

④ $y'' = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 5$

⑤ $xy'' - y' = 3$

⑥ $4x^2y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$

⑦ $y'' - \cot(x)y' - y\sin^2 x = 0$

الحل:

① $x^2y'' - xy' - 3y = x^5$

كوشي أولر: نفرض $x = e^t$

$\Rightarrow xy = y'_t$

$\Rightarrow x^2y'' = y''_t - y'_t$

نعوض:

$y''_t - 4y_t - y'_t - 3y = e^{5t}$

$\Rightarrow y''_t - 2y'_t - 3y = e^{5t}$

نعود لنوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

نكتب المعادلة المميزة:

TEL:0931497960 - مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس)

$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$

$\Rightarrow (m-3)(m+1) = 0$

$m_1 = 3 \qquad m_2 = -1$

$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$

نوجد الحل الخاص لغير المتجانسة عن طريق المعاملات الغامضة:

-3	$y_p(t) = A e^{5t}$
-2	$y' = 5A e^{5t}$
1	$y'' = 25A e^{5t}$

$\Rightarrow -3A e^{5t} - 10A e^{5t} + 25A e^{5t} = e^{5t}$

$\Rightarrow 12A e^{5t} = e^{5t}$

$\Rightarrow A = 1/12$

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{12} e^{5t}$

$\Rightarrow y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{12} e^{5t}$

$\Rightarrow y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x} + \frac{1}{12} x^5$

(2) $(x+2)^2 y'' - 6(x+2) y' - y = x$

بفرض: $z = x + 2$ نعوض

$x = z - 2$ نعوض

$z^2 y'' + z y' - y = z - 2$

نعرض $z = e^t$

$\Rightarrow z^2 y'' = y''_t - y'_t \Rightarrow z y' = y'_t$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y''_t - y'_t + y'_t - y = e^t - 2$ نعوض:

$\Rightarrow y''_t - y = e^t - 2$

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

نكتب المعادلة المميزة:

$m^2 - 1 = 0$

$m_{1,2} = \pm 1$

$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

نوجد الحل الخاص لغير المتجانسة عن طريق المعاملات الغامضة:

-1	$y_p(t) = At e^t + B$
0	$y' = At e^t + Ae^t$
1	$y'' = At e^t + 2Ae^t$

$B = 2 \qquad A = 1/2$

$y_p(t) = \frac{1}{2} t e^t + 2$

$\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$\Rightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t + 2$

$\Rightarrow y(z) = \frac{1}{2} z \ln z + C_1 z + C_2 \frac{1}{z} + 2$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(x+2)\ln(x+2) + C_1(x+2) + \frac{C_2}{x+2} + 2$

(3) $(2x-3)^2 y'' - 6(2x-3)y' + 12y = 1 + 2x$

$z = 2x - 3$ نفرض

$\Rightarrow z^2 y'' - 6z y' + 12y = z + 4$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y_z \cdot 2$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y'_z \cdot 2)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2y''_z \cdot 2 = 4y''_z$$

نعوض:

$$4z^2 y''_z - 12z y'_z + 12y = 4 + z$$

نفرض $z = e^t$

$$\Rightarrow 4y''_t - 4y'_t - 12y'_t + 12y = 4 + e^t$$

$$\Rightarrow 4y''_t - 16y'_t + 12y = 4 + e^t$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 16m + 12 = 0$$

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{3t} + C_2 e^t$$

12	$y_p = At e^t + B$
-16	$y' = Ae^t + At e^t$
4	$y'' = 2Ae^t + At e^t$

$$\Rightarrow 8Ae^t - 16Ae^t + 12B = 4t e^t$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{3}, \quad A = \frac{-1}{8}$$

$$y_p = -\frac{t}{8} e^t + \frac{1}{3}$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^t - \frac{t}{8} e^t + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(z) = C_1 z^3 + C_2 z - \frac{z \ln z}{8} + \frac{1}{3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow y(x) = C_1 (2x-3)^3 + C_2 (2x-3) + \frac{-\ln(2x-3)}{8}(2x-3)^4 + \frac{1}{3}$$

(4) $y'' = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 5$

نكامل الطرفين 2 مرة.

$$\Rightarrow y' = x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + C_1$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

(5) $xy'' - y' = 3$

خالية منه y.

نفرض: $y' = \xi$, $y'' = \xi'$

نقسم على الطرفين x:

$$\xi' - \frac{1}{x}\xi = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \xi' = \frac{\xi + 3}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{\xi + 3} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|\xi + 3| - \ln|x| = \ln C_1$$

$$\Rightarrow \xi + 3 = C_1 x$$

$$\Rightarrow y' = C_1 x - 3$$

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} - 3x + C$$ نكامل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(6) $4x^2y'' + 4xy' + (x^2-1)y = 0$

$$\Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}$$

نجد الشرط:

$$Q(x) = \frac{-p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$= \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow u = e^{\int -\frac{p(x)}{2}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y = uv = \frac{1}{\sqrt{x}}v$$

$$\Rightarrow v'' + Q(x)v = 0 \Rightarrow v'' + \frac{1}{4}v = 0$$

$$m^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$m_{1,2} = \mp \frac{1}{2}i$$

$$v = \left(C_1 \cos\frac{1}{2}x + C_2 \sin\frac{1}{2}x\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1 \cos\frac{1}{2}x + C_2 \sin\frac{1}{2}x\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(7) $y'' - \cot x\, y' - y \cdot \sin^2 x = 0$

$p(x) = -\cot x \quad , \quad q(x) = -\sin^2 x$

نختبر الشرط:

$$\frac{q' + 2pq}{q\sqrt{q}} = C$$

$$\Rightarrow q' + 2pq = -2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x$$

$= 0$ الشرط تحقق

$$\xi' = \sqrt{kq} = \sqrt{-k\sin^2 x}$$

نضع $k = -1$

$$\xi' = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$$

$$\Rightarrow \xi = -\cos x$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = y'_\xi \sin x$$

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y'_\xi \sin x)}{dx} = y''_\xi \sin^2 x + y'_\xi \cos x$$

نعوض:

$$y'_\xi \sin^2 x + y'_\xi \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} y'_\xi \sin x - y \sin x = 0$$

$$\Rightarrow y''_\xi \cdot \sin^2 x - y \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow y''_\xi - y = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \mp 1$$

$$\Rightarrow y(\xi) = C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-\cos x} + C_2 e^{\cos x}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة