كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال المتغيرة:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$$

* معادلات كاملية:

① معادلة كوشي أولر:

$$x^2y'' + axy' + by = R(x)$$

لحلها نفرض: $x = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}y'_t$$

$$\Rightarrow \boxed{xy' = y'_t}$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y'_t\right) = \frac{-1}{x^2}y'_t + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}(y'_t)\frac{dt}{dx}$$

(y''_t)

$$\Rightarrow \boxed{x^2y'' = y''_t - y'_t}$$

نعوض بالشكل العام لكوشي أولر:

$$y''_t - y'_t + ay_t + by = R(e^t)$$

$$y''_t + (a-1)y'_t + by = R(e^t)$$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - مكتبة A to Z

مثال:

$x^2y'' - 3xy' + 3y = x$

الحل: نفرض $x = e^t$

$xy' = y'_t \quad ; \quad x^2y'' = y''_t - y'_t$

$\Rightarrow y''_t - y'_t - 3y'_t + 3y = e^t$

$\Rightarrow y''_t - 4y'_t + 3y = e^t$

أعرب ذاتي أمثلة ثانية ثم حلها وفق الطريقة التي تعلمناها سابقاً.

$m^2 - 4m + 3 = 0$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$ ← الحل العام

الحل الخاص

3	$y_p(t) = At\,e^t$
-4	$y'_p(t) = At\,e^t + Ae^t$
1	$y''_p(t) = 2Ae^t + At\,e^t$

$\Rightarrow -2Ae^t = e^t \Rightarrow A = -1/2$

$\Rightarrow y_p(t) = -1/2\ t\,e^t$

$\Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2 x^3 - \frac{1}{2} x \ln x$

(2) معادلة لاغرانج:

$(ax+b)^2 y'' + q(ax+b)y' + a_2 y = R(x)$

الحل نفرض: $z = ax + b$

$z = e^t$

مثال:

$(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$

نفرض: $z = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{z-2}{3}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = 3y'_z$$

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{d(3y'_z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 9y''_z$$

$$\Rightarrow 9z^2y''_z + 9zy'_z - 36y = 3\left(\frac{z-2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{z-2}{3}\right)+1$$

وبالتالي الحل النهائي:

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{108}te^{2t} + \frac{1}{108}$$

ثم نعوض:

$z=e^t$ ، $t=\ln(x)$ و $z=3x+2$ ثم نحصل على

مسيرة الحل العام.

(3) معادلة خطية x فقط:

$$y'' = R(x)$$

(4) معادلة خالية من y:

نفرض $y'=z$ و $y''=z'$

$$\Rightarrow z' + p(x)z = R(x)$$

في الحالة العامة نناقش طريقتين حل لكل معادلة تفاضلية خطية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية ولكن كل من هاتين الطريقتين لا يمكن تطبيقها إلا بشروط.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$$

1- طريقة تغيير الثوابت:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y = u \cdot v$ يحول ← معلوم من معادلة

$y' = u'v + uv'$

$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$

نعوض: $uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu' + qu)v = R(x)$

نقسم الطرفين على u:

$$v'' + \left(\frac{2u'}{u} + p\right)v' + \left(\frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u} + q\right)v = \frac{R(x)}{u(x)}$$

نختار u بحيث أمثال v تساوي الصفر:

$$\Rightarrow \frac{2u'}{u} + p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{u} = -p/2$$

$$\Rightarrow \ln u = -\int \frac{P(x)}{2}\,dx$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int \frac{p}{2}\,dx}$$

وفيه:

$$v'' + Q(x)v = \frac{R(x)}{u(x)}$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{u''}{u} + p\frac{u'}{u} + q$$

لدينا $u' = -pu/2$

$$u'' = \frac{-1}{2}p'u - \frac{1}{2}pu'$$

$$\frac{u''}{u} = \frac{-p'}{2} - \frac{1}{2}p\frac{u'}{u} \to \frac{-p}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{u} = \frac{-p'}{2} + \frac{p^2}{u}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

$$Q(x) = \frac{-p'}{2} + \frac{p^2}{4} + \left(\frac{-p^2}{2}\right) + q$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{-p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q$$

يكون (1) قابلة للحل بهذه الطريقة إذا كانت إما:

ذات أشكال ثابتة $\rightarrow Q(x) = a$

أو سيني أولر $\rightarrow Q(x) = \frac{a}{x^2}$

أو غرانج $\rightarrow Q(x) = \frac{a}{(a_1x+b_1)^2}$

$$\frac{-p'}{2} + \frac{-p^2}{4} + q =$$

$$a \qquad \frac{a}{x^2} \qquad \frac{a}{(a_1x+b_1)^2}$$

مثال:

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = \frac{x^3}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = \frac{x}{\sin x}$$

$$p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q = 1$$

$\Leftarrow$ الشرط محقق دوماً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int \frac{dx}{2}$$

$u = e \qquad = x$

$y = x\,v \Rightarrow y' = v + x v'$

$y'' = 2v' + x\,v''$

نعوض في المعادلة:

$$2v' + x v'' - \frac{2}{x} v - 2v' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) x v = x / \sin x$$

$$\Rightarrow x v'' + x v = \frac{x}{\sin x} \Rightarrow v'' + v = \frac{1}{\sin x}$$

$$\Rightarrow v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln \sin x$$

$\Rightarrow y = x (\quad v \quad)$

2- طريقة تغيير المجهول:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = R(x)$$

$$z = P'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z \cdot z'_x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_z \cdot z'^2_x + y'_z \cdot z''_x$$

نعوض: $(z'_x)^2 y''_z + (z''_x + p z'_x) y'_z + q(x) y = R(x)$

نقسم الطرفين على z'^2_x

$$\Rightarrow y''_z + \left(\frac{z''_x + p z'_x}{z'^2_x}\right) y'_z + \frac{q(x)}{z'^2_x} y = \frac{R(x)}{z'^2_x}$$

$P_1 \qquad q_1 \qquad R_1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\zeta'' x + P\zeta' x}{\zeta'^2 x} = b \quad , \quad \frac{q}{\zeta'^2 x} = a$$

$$\Rightarrow \zeta'^2 x = q/a \Rightarrow \zeta' x = \sqrt{\frac{q}{a}}$$

$$\Rightarrow \zeta'' x = \frac{\frac{q'}{a}}{2\sqrt{\frac{q}{a}}} = \frac{q'}{2\sqrt{q}\sqrt{a}}$$

$$\frac{\frac{q'}{2\sqrt{q}\sqrt{a}} + P\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}}{\frac{q}{a}} = b$$

$$\Rightarrow \frac{q' + 2Pq}{q\sqrt{q}} = \frac{2b}{\sqrt{a}} = C$$ ثابت

وهو الشرط الذي يجب أن يتحقق باستخدام هذه الطريقة:

$$\zeta' x = \sqrt{\frac{q}{a}} = \sqrt{kq}$$

$$\zeta = \int \sqrt{kq}\, dx$$

مثال:

$$\cos x\, y'' + \sin x\, y' - 2y\cos^3 x = 2\cos^5 x$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{\sin x}{\cos x} y' - 2y\cos^2 x = 2\cos^4 x$$

$$P = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad q = -2\cos^2 x$$

$$q' + 2Pq = 4\cos x \sin x$$

$$-4\sin\cos x = 0$$

⇐ الشرط تحقق

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\xi'_x = \sqrt{K(-2)\cos^2 x}$$

$$K = -\frac{1}{2}$$

$$\xi'_x = \cos x \Rightarrow \xi(x) = \sin x$$

$$y'_x = y'_\xi \cdot \cos x$$

$$y''_x = y''_\xi \cos^2 x - \sin x\, y'_\xi$$

$$\Rightarrow \cos^2 x\, y''_\xi - \sin x\, y'_\xi + \frac{\sin x}{\cos x}\cos x\, y'_\xi - 2\cos^2 x\, y = 2\cos^4 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x\, y''_\xi - 2\cos^2 x\, y = 2\cos^4 x$$

$$\Rightarrow y''_\xi - 2y = 2\cos^2 x$$

$$= 2(1 - \xi^2)$$

$$y''_\xi - 2y = 2(1 - \xi^2)$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}\sin x} + C_2 e^{-\sqrt{2}\sin x} + \sin^2 x$$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z