كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الاولى/عملي/

خاصة: الشروط المكافئة لمفهوم زمرة جزئية:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة و H مجموعة، إن H تكون زمرة جزئية من G إذا تحققت إحدى الشروط الثلاث المتكافئة:

$\boxed{1}$

أ. $\phi \neq H \subseteq G$

2. H مغلقة بالنسبة لـ $*$

3. $*$ تجميعية على عناصر H (محققة دوماً)

4. يوجد حيادي في H هو نفسه حيادي G

5. لكل عنصر H نظير في H (وهو نفسه النظير في G)

$\boxed{2}$

1) $\phi \neq H \subseteq G$

2) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$

3) $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

$\boxed{3}$

أ) $\phi \neq H \subseteq G$

ب) $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H$

التمرين الأول:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة وكانت $x \in G$ فإن مجموعة قوى x أي $\langle x\rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة G.

الحل:

م- واضح أن $\langle x\rangle \subseteq G$ ((لأن $x \in G$))

$\langle x\rangle \neq \phi$ لأن $x = x^1 \in \langle x\rangle$

ليكن

$\forall a,b \in \langle x\rangle \Rightarrow \exists\, n,m \in \mathbb{Z} ; a = x^n , b = x^m$

$\Rightarrow a * b^{-1} = x^n * (x^m)^{-1} = x^n * x^{-m} = x^{n-m} \in \langle x\rangle$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in \langle x\rangle$

منه وجب أن $\langle x\rangle$ زمرة جزئية في G

السؤال الثاني:

في $(\mathbb{Z}_{12},\oplus)$ أوجد حلول المعادلات الآتية:

① $(x \oplus 3) \oplus (x \oplus 10) = 7$

حل ①:

$x \oplus x \oplus 3 \oplus 10 = 7$

$2x \oplus \overline{13} = 7$

$2x \oplus 1 = 7$

$2x \oplus 1 \oplus 11 = 7 \oplus 11$

$2x \oplus \overline{12} = \overline{18}$

$2x \oplus 0 = 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

② $2x \oplus 7 = 6 \oplus x$

الحل ②:

$2x \oplus 7 = x \oplus 6$

$(-x) \oplus 2x \oplus 7 = (-x) \oplus x + 6$

$x \oplus 7 = 6$

$x \oplus 7 \oplus 5 = 6 + 5$

$\Rightarrow x \oplus \overline{12} = 11$

$\Rightarrow x \oplus 0 = 11$

$\Rightarrow \boxed{x = 11}$

* إذا كان $(G, *)$ زمرة و n عنصرين Z فإنّه يتحقق:

① $\forall x \in G \,,\ o(x^{-1}) = o(x)$

② إذا كانت $o(x) = n$ وكانت $x^m = e$ فإنّ n يقسم m

نفرض أنّ $o(x) = n$ ولنبرهن أنّ $o(x^{-1}) = n$

م‍ $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$

ب- لنفرض أنه k عدد طبيعي أصغر من n يحقق:

$(x^{-1})^k = e$

$\Rightarrow x^{-k} = e \Rightarrow (x^{-k})^{-1} = e^{-1} \Rightarrow x^k = e$

وهذا تناقض مع كون n هي رتبة x

وبالتالي $o(x^{-1}) = n$

A من أجل العددين n و m حسب نظرية التقسيم الخوارزمي

يوجد عددين صحيحين r, q بحيث يكون $0 \leq r < n$ و

$$m = qn + r$$

$$e = x^m = x^{qn+r} = x^{qn} \cdot x^r = (x^n)^q \cdot x^r \cdot e^q \cdot x^r$$

$$= e \cdot x^r = x^r \Rightarrow e = x^r$$

ولكن $r < n$ وهذا تناقض كون n رتبة لـ x

بالتالي $r = 0 \Rightarrow m = qn$ و n يقسم m.

انتهت المحاضرة