كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الزمرة الجزئية الناظمية:

نقول عن زمرة جزئية H من الزمرة $(G,*)$ إنها ناظمية إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall h\in H,\ g\in G \Rightarrow g*h*g^{-1}\in H$$

هومومورفيزمات الزمر:

ليكن $f:(G,*)\to(H,T)$ تطبيقاً من زمرة $(G,*)$ إلى الزمرة (H,T) نقول عن f إنّه هومومورفيزم إذا تحقق الشرط:

$$f(x*y)=f(x)\,T\,f(y)$$

الحلقات Rings:

تعريف: لتكن R مجموعة غير خالية، (T) و $(*)$ عمليتين ثنائيتين معرفتين على R. نسمّي الثلاثية $(R,T,*)$ حلقة إذا تحققت الشروط الآتية:

1- (R,T) زمرة تبديلية.

2- $(*)$ عملية تجميعية أي أنّ:

$$x*(y*z)=(x*y)*z \qquad \forall x,y,z\in R$$

3- توزيع العملية $(*)$ على (T) من اليسار واليمين أي أنّ:

$$x*(yTz)=(x*y)T(x*z)$$

$(xTy)\star z = (x\star z)T(y\star z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

★ سنرمز أحياناً للعملية (T) بالرمز (+) ، وللعملية الثنائية (★) بالرمز (.) وعندها سنرمز للحلقة بالرمز $(R,+,.)$ ، و★ في هذه الحالة نسمّي العملية الأولى بالجمع والعملية الثانية بالضرب، وليس من الضروري أن تكون العمليتين هما عمليتي الضرب والجمع العاديتين.

ضمن هذه الرموز نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة للجمع (وهو موجود دائماً) بالرمز 0_R أو 0 ونسمي صفر الحلقة، كما نسمّي الزمرة التبديلية $(R,+)$ بالزمرة الجمعية.

★ إذا كانت العملية الثنائية تبديلية في الحلقة $(R,T,\star)$ فإننا نطلق على هذه الحلقة اسم حلقة تبديلية.

★ إذا وجد عنصر حيادي بالنسبة للضرب فإننا نرمز له بالرمز 1_R أو 1 ونسميه عنصر الوحدة أو العنصر الحيادي الضربي، ونقول عن الحلقة R إنها واحدية أو ذات عنصر وحدة.

أمثلة:

1) حلقة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+,.)$

أ- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية.

ب- $(.)$ عملية تجميعية.

ج- الضرب توزيعي على الجمع من اليمين ومن اليسار.

د- الضرب العادي تبديلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

5) يوجد عنصر حيادي ضربي (1)

مما سبق نجد أن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة.

[2] $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة تبديلية لأنها لا تملك عنصر وحدة.

[3] حلقة الأعداد الصحيحة قياس n أو حلقة بواقي القسمة على n.

- نعلم أن $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ زمرة تبديلية عنصرها الحيادي 0 والنظير الجمعي لكل عنصر x يختلف عن الصفر هو $n-x$

لنعرف على $\mathbb{Z}_n$ عملية ثنائية $\odot$ كما يلي:

$x \odot y = \overline{x \cdot y}$ = باقي قسمة $x.y$ على n

إن $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ حلقة وهي حلقة تبديلية لأنه:

$\forall x, y \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow x \odot y = \overline{x \cdot y} = \overline{y \cdot x} = y \cdot x$

وهي حلقة واحدية لأنه:

$\exists\, 1 \in \mathbb{Z}_n ; \forall x \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow 1 \odot x = \overline{1 \cdot x} = x$

لم نثبت الاتجاه العكسي لأنه $\odot$ تبديلية.

[4] لتكن $(M_n(R), +, \cdot)$ ثلاثية مكونة من مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة n فوق R حيث $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية وعملية جمع المصفوفات وعملية ضرب المصفوفات.

نعلم أنه:

1- $(M_n(R), +)$ زمرة تبديلية

2- ضرب المصفوفات تجميعي.

3- ضرب المصفوفات توزيعي على جمع المصفوفات

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4- يوجد عنصر محايد ضربي هو المصفوفة الواحدية

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

بالتالي $(M_n(R), +, \cdot)$ هو حلقة ذات عنصر وحدة.

ملاحظة: عندما تكون العملية $(\cdot)$ تبديلية فإن شرطي توزيع الضرب على الجمع يصبح شرطاً واحداً، وأيضاً شرط المحايد الضربي يصبح شرطاً واحداً.

تعاريف:

1- العنصر a من الحلقة $(R, +, \cdot)$ يسمى قاسماً للصفر إذا وجد عنصر b يختلف عن الصفر من تلك الحلقة ويحقق:

$$a.b = 0 \quad \text{أو} \quad b.a = 0$$

إذا كان a يختلف عن الصفر وقاسماً للصفر فإننا نسميه قاسم فعلي للصفر.

مثال:

1- في الحلقة $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$ لدينا:

$$2 \odot 3 = \overline{2.3} = \overline{6} = 0$$

إن $2, 3$ قواسم فعلية للصفر.

2- في حلقة المصفوفات المربعة فوق $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ لدينا:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي A و B قواسم مفلية للصفر

ملاحظة: إذا كانت $a \neq 0$ عنصر غير قاسم للصفر من حلقة $(R, +, \cdot)$ فإنه: $a^k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\cancel{a^k = 0 \Rightarrow a \cdot a^{k-1} = 0}$

2) العنصر a من الحلقة $(R, +, \cdot)$ يسمى عنصر بقوة معدومة إذا وجد عدد طبيعي n بحيث $a^n = 0$

مثال:

في الحلقة $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ لدينا

$$2^3 = 2 \odot 2 \odot 2 = \overline{8} = 0$$

$$4^2 = 4 \odot 4 = \overline{16} = 0$$

3) العنصر a من الحلقة $(R, +, \cdot)$ يسمى عنصراً جامداً إذا كانت $a^2 = a$

مثال: في الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ لدينا $1 \cdot 1 = 1$ وبالتالي 1 عنصراً جامداً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف العنصر القابل للقلب:

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدية وليكن a عنصراً ما من R

نقول عن a أنّه قابل للقلب في R إذا وجد $b \in R$

بحيث $a.b = b.a = 1$

يرمز أن b في حالة وجوده وحيد، ويسمّى b المقلوب

الضربي لـ a في الحلقة R ونرمز له بـ a^{-1}.

تعريف المنطقة التكاملية:

المنطقة التكاملية هي حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة ولا تحوي

قواسم فعلية للصفر.

مثال: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ منطقة تكاملية.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ منطقة تكاملية.

تمرين: لتكن $(A, +, \cdot)$ منطقة تكاملية، وليكن a, b

عنصرين من A بحيث أن

$a^7 = b^7$ & $a^5 = b^5$

بين أن $a = b$

الحل:

1)- إذا كان $a = 0$ فإنّ:

$a = 0 \Rightarrow a^5 = 0 \Rightarrow b^5 = 0 \Rightarrow b = 0$

(لأن A منطقة تكاملية)

$\Rightarrow a = b$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ب) إذا كان $a \neq 0$ ، بما أنّ:

$$a^7 = b^7 \Rightarrow a^5 \cdot a^2 = b^5 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow a^5 \cdot a^2 = a^5 \cdot b^2$$

«لأن $a^5 = b^5$ فرضاً»

$$\Rightarrow a^5 (a^2 - b^2) = 0$$

وبما أن A منطقة تكاملية و $a = 0$ فإن $a^5 \neq 0$ ومنه

$$a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow (a^2)^3 = (b^2)^3$$

$$\Rightarrow a^6 = b^6$$

$$\Rightarrow a^5 \cdot a = a^5 \cdot b$$ (لأن $a^5 = b^5$)

$$\Rightarrow a^5 (a - b) = 0$$

وبما أن A منطقة تكاملية و $a \neq 0$ فإنّ $a^5 \neq 0$ ومنه:

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة