كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تذكرة في الزمر:

الزمرة Group : لتكن G مجموعة غير خالية و لتكن * عملية جبرية ثنائية معرفة عليها نقول عن G إنها زمرة بالنسبة للعملية * إذا تحققت الشروط الآتية:

① العملية (*) تجميعية على عناصر G.

$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \forall x,y,z \in G$

② الحيادي: يوجد في G عنصر حيادي e بالنسبة للعملية *

$x*e = e*x = x \quad ; \quad \forall x \in G$

③ لكل عنصر في G يقابله أو نظير بالنسبة للعملية (*).

$x*x^{-1} = x^{-1}*x = e \quad \forall x \in G$

إذا كانت العملية (*) بالإضافة إلى الشروط الثلاثة السابقة عملية تبديلية على عناصر G فإننا نقول عن الزمرة $(G,*)$ إنها تبديلية.

أمثلة:

① مجموعة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z},+)$ زمرة بالنسبة لعملية الجمع العادي المعرفة عليها.

② $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة لأنه لا يوجد لكل عنصر نظير.

③ $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ زمرة.

نظريات أساسية:

1) في أي زمرة $(G, *)$ تحقق:

أ. العنصر الحيادي وحيد.

ب. نظير أي عنصر وحيد.

ج. معكوس المعكوس للعنصر x يساوي x نفسه أي أن:

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

2) في كل زمرة $(G, *)$ تحقق:

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

وتعم هذه الخاصة:

$$(x_1 * \dots * x_n)^{-1} = x_n^{-1} * \dots * x_1^{-1}$$

والبرهان:

$$(x*y)*(y^{-1}*x^{-1}) = x*(y*y^{-1})*x^{-1} = x*e*x^{-1}$$
$$= x*x^{-1} = e$$

3) في أي زمرة $(G, *)$ تحقق

$x*y = x*z \Rightarrow y = z$ (اختزال من اليسار)

$x*y = z*y \Rightarrow x = z$ (اختزال من اليمين).

قوة عنصر في زمرة:

لتكن $(G, *)$ زمرة وليكن x عنصراً من G نعرف قوة عنصر x في الزمرة G كما يلي:

$$x_n = \begin{cases} x * \dots * x \ (\text{مرة } n) & \text{if } n > 0 \\ x^{-1} * \dots * x^{-1} \ (\text{مرة } n) & \text{if } n < 0 \\ \text{حيادي} & n = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في حالة $(G,+)$ هذا يكافئ:

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x+\dots+x}_{n\text{ مرة}} & \text{if } n>0 \\ e & \text{if } n=0 \\ (-x)+\dots+(-x) & \text{if } n<0 \end{cases}$$

خواص قوة عنصر:

ليكن $(G,*)$ زمرة وليكن x عنصراً من G عندئذٍ تتحقق الخواص الآتية:

$$x^m * x^n = x^{m+n} \quad (1)$$

$$(x^n)^{-1} = x^{-n} = (x^{-1})^n \quad (2)$$

$$(x^m)^n = x^{m.n} \quad (3)$$

عندما تكون الزمرة جمعية فإن الخواص السابقة تكتب بالشكل:

$$nx + mx = (n+m)x \quad (1)$$

$$-(nx) = (-n)x = n(-x) \quad (2)$$

$$m(nx) = (m.n)x \quad (3)$$

مجموعة قوى عنصر في زمرة والزمرة الدائرية:

ليكن $(G,*)$ زمرة وليكن x عنصراً ما من G و المجموعة $\{x^n \mid x\in\mathbb{Z}\} \subseteq G$ تسمى مجموعة قوى x ونرمز لها بـ $\langle x\rangle$

★ نلاحظ أن $\langle x\rangle$ زمرة جزئية من G.

★ خواص الزمرة الجزئية:

$$x.y^{-1} = x^m.(x^n)^{-1} = x^{m+(-n)} \in \langle x\rangle \quad (1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x \cdot y^{-1} \in T$ ②

$x - y \in T$

تعريف: إن الزمرة الجزئية $\langle x \rangle$ تسمّى بالزمرة المولدة بـ x من أجل كل x من الزمرة $(G, *)$ وكل زمرة مولدة بعنصر تسمّى زمرة دائرية. فإذا كانت $(G, *)$ زمرة فإنها تكون دائرية إذا وفقط إذا وجد $x \in G$ بحيث يكون $G = \langle x \rangle$

زمرة الأعداد الصحيحة قياس n أو زمرة بواقي القسمة على n

لتكن $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ولنعرف على Z_n عملية ثنائية $\oplus$ بالعلاقة:

$$\forall x, y \in Z_n \Rightarrow x \oplus y = \overline{x + y}$$

مثال: إذا كانت $n = 4$ فإن: $Z_n = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} = \bar{1}$$

$$\bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}$$

* إن الزمرة $(Z_n, \oplus)$ تبديلية عنصرها الحيادي $e = 0$ ونظير كل عنصر $x \neq 0$ هو $n - x$، هذه الزمرة تسمّى زمرة الأعداد الصحيحة قياس n $(\mod n)$ أو زمرة بواقي القسمة على n وهي دوماً زمرة منتهية وعدد عناصرها n.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: في الزمرة $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ أوجد ما يلي:

$3 \oplus (-4) \oplus -1$ ، $(3 \oplus 2) \oplus 5$ ، -2 ، $-2(3)$ ، $2(-4)$

الحل:

- $-2 = 4$
- $(3 \oplus 2) \oplus 5 = 5 \oplus 5 = \bar{10} = 4$
- $3 \oplus (-4) \oplus (-1) = 3 \oplus 2 \oplus 5 = \bar{10} = 4$
- $-2(3) = -3 \oplus (-3) = 3 + 3 = \bar{6} = 0$
- $2(-4) = 2(2) = 2 \oplus 2 = 4$
- $-3(4) = 3(-4) = 3(2) = 2 \oplus 2 \oplus 2 = \bar{6} = 0$

مثال: لنبحث حلول المعادلة في $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$:

$$x \oplus 5 = 4$$

$$\Rightarrow x \oplus 5 \oplus 1 = 4 \oplus 1$$

$$\Rightarrow x \oplus \bar{6} = 5$$

$$\Rightarrow x \oplus 0 = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 + 6k \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة: إن الزمرة $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ دائرية مولدة بالعنصر 1

أي أن $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$

مثال: في الزمرة $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ احسب جميع الزمر الجزئية الدائرية.

الحل:

$\langle 0 \rangle = \{0\}$

$\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_6$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\langle 2 \rangle = \{n(2) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, 4\}$

$\langle 3 \rangle = \{n(3) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3\}$

$\langle 4 \rangle = \{0, 2, 4\}$

$\langle 5 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$(\langle x \rangle = \langle n - x \rangle)$

ملاحظة: في الزمرة $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ متحقق:

$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x - y \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y = nq \quad ; \quad q \in \mathbb{Z}'$

$x = nq_1 + r$
$y = nq_2 + r$
$\Rightarrow x - y = nq_1 - nq_2 = n(q_1 - q_2) \in n\mathbb{Z}$

انتهت المبرهنة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z